

부재와 구조 여유도를 고려한 부정정 트러스 단면 최적화

정민찬¹ · 김선용^{2*}

¹석사과정, 원광대학교, 건설환경공학과, ²교수, 원광대학교, 건설환경공학과

Truss Cross-Section Optimization Considering Redundancy at Member and Structural System Levels

Jung, Min-Chan¹, Kim, Sunyong^{2*}

¹Graduate Student (Master's Course), Dept. of Civil and Environmental Engineering, Wonkwang University, Iksan, 54538, Korea

²Professor, Dept. of Civil and Environmental Engineering, Wonkwang University, Iksan, 54538, Korea

Abstract – This paper presents a truss cross-section optimization method that considers both member redundancy and structural system redundancy. The optimization problem minimizes structural volume while satisfying constraints on member reliability, member redundancy index, and structural redundancy. Member redundancy is evaluated using distributed static indeterminacy and the member redundancy index, whereas structural redundancy is assessed by a deterministic index based on residual load-carrying capacity after member yielding. Applications to six-bar and ten-bar trusses show that higher reliability and redundancy requirements generally increase optimal cross-sectional areas and structural volume, while also changing material distribution among members.

Keywords – Member redundancy, Optimization, Structural redundancy, Reliability, Truss

1. 서론

구조물의 설계 및 안전성 평가는 일반적으로 개별 부재(component) 수준의 거동과 신뢰도에 기반을 둔다. 그러나 특정 부재의 국부적인 파괴가 반드시 전체 구조 시스템의 붕괴로 이어지는 것은 아니며, 하중을 재분배할 수 있는 대체 하중 경로(alternative load paths)를 갖춘 구조물은 일부 부재 파괴 이후에도 추가적인 하중을 지지할 수 있다^{[1]-[3]}. 따라서, 구조물의 붕괴를 방지하고 전반적인 안전성을 확보하기 위해 개별 부재의 안전성 뿐만 아니라 구조시스템 여유도(structural system redundancy)를 필수적으로 고려하고 있다. 시스템 여유도는 주로 부재 파괴 하중과 시스템 붕괴 하중의 비율과 같은 결정론적 지수나 확률론적인 파괴 확률의 차이

를 통해 정량화되며^{[3],[4]}, 이를 극대화하여 구조물의 안전성을 높이는 것이 필요하다^{[4],[5]}.

구조시스템 차원에서 높은 수준의 여유도를 확보하는 것은 매우 중요하지만, 특정 개별 부재가 시스템 내에서 과도하게 여유롭거나 완전히 잉여적인 상태로 존재하는 것은 재료가 비효율적으로 분배되었음을 의미한다. 즉, 구조물의 안전성 확보를 위해 시스템 여유도를 무조건적으로 늘리는 것은 불필요한 부재에까지 과도한 단면적을 할당하게 만들어 비경제적인 설계를 초래할 수 있다. 따라서, 이상적인 구조 설계는 시스템 전체의 여유도를 극대화하면서도 개별 부재 수준의 여유도(member redundancy)를 최소화하여, 구조물 내 모든 부재가 하중 지지에 실질적으로 기여하도록 재료를 분배하는 것이다^[6]. 최근에는 이러한 부재 여유도를 정량화하기 위해 분포된 정적 부정정(distributed static indeterminacy, DSI)에 기반한 부재 여유도 지수(member redundancy index, MRI)가 도입되어, 재료 할당의 적절성을 평가하는 도구로 활용되고 있다^{[7],[8]}.

지금까지 구조 최적화 분야에서는 부재별 설계 요건을 만족하면서 구조물의 총 중량 또는 부피를 최소화하

Note.-Discussion open until December 31, 2026. This manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on April 19, 2026; revised on May 26, 2026; approved on May 26, 2026. Copyright © 2026 by Korean Society of Steel Construction

*Corresponding author.

Tel. +82-63-850-6716 Fax. +82-63-850-6666

E-mail. sunyongkim@wku.ac.kr

는 방법이 일반적으로 적용되어 왔다^{[9]-[11]}. 또한 시스템 신뢰도 및 구조시스템 여유도를 고려한 최적화 연구도 수행되어 왔다^{[4],[5]}. 그러나 기존 연구들은 주로 신뢰도 또는 시스템 수준의 여유도에 초점을 두었으며, 부재 여유도와 구조시스템 여유도를 동시에 고려하여 트러스 부재의 최적 단면을 결정하는 연구는 제한적이다. 이러한 배경을 바탕으로, 본 논문에서는 부재 여유도와 구조시스템 여유도를 동시에 고려하여 트러스 구조물의 단면적을 최적화하는 새로운 방법을 제시한다. 시스템 여유도는 대체 하중 경로를 제공하고 구조물의 붕괴를 방지하기 위해 필수적인 반면, 부재 여유도를 평가하고 통제하는 것은 트러스 구조물의 단면적에 재료가 적절히 분배되었는지를 보장한다. 보다 안전한 트러스 시스템 설계를 달성하기 위해 본 연구에서는 부재별 재료 분배의 적절성과 구조시스템 여유도를 일정 수준 이상 확보하도록 최적화를 수행한다. 결과적으로 본 연구의 최적화 문제는 구조물의 총 부피, 신뢰도, 그리고 이 두 가지 여유도를 복합적으로 고려하여 트러스 시스템의 최적 단면적을 결정하도록 정식화되며, 이를 통해 안전성과 경제성이 균형을 이룬 구조 설계를 유도하고자 한다.

본 연구의 주요 신규성은 부재 수준의 신뢰도, 부재 수준의 여유도, 그리고 구조시스템 수준의 여유도를 하나의 단면 최적화 문제 내에서 동시에 고려한다는 점에 있다. 기존 연구에서는 구조시스템 여유도 또는 시스템 신뢰도를 중심으로 최적화를 수행하거나, 부재 여유도 지수를 재료 분배의 적절성을 평가하기 위한 지표로 개별적으로 활용하였다. 그러나 구조시스템 여유도를 증가시키는 것만으로는 일부 부재에 과도한 재료가 배분될 수 있으며, 반대로 부재 수준의 재료 분배만을 고려하는 경우 첫 번째 부재 손상 이후의 시스템 차원의 잔존 내하력을 충분히 확보하기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 부재 신뢰도 제한조건을 통해 개별 부재의 안전성을 확보하고, MRI 제한조건을 통해 부재별 재료 분배의 적절성을 유도하며, 구조시스템 여유도 제한조건을 통해 부재 항복 이후의 잔존 내하력을 확보하도록 최적화 문제를 정식화하였다. 이를 통해 본 연구는 경제성, 부재 수준 안전성, 재료 분배의 효율성, 그리고 시스템 수준의 붕괴 저항성을 동시에 고려할 수 있는 트러스 단면 설계 방법을 제시한다.

2. 부재 여유도

부재 여유도를 정량적으로 계산하기 위해서는 여유도 행렬(redundancy matrix), 분포된 정적 부정정(DSI), 그리고 부재 여유도 지수(MRI)를 사용한다.

2.1 분포된 정적 부정정(DSI)

여유도 행렬 \mathbf{R} 은 작용 하중 조건과 무관하게 구조물의 기하학적 형태, 재료 특성, 부재 강성 등 고유의 특성만을 바탕으로 다음과 같이 계산한다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{I} 는 단위행렬, \mathbf{A} 는 평형행렬, 그리고 \mathbf{G} 는 축 강성 대각행렬을 나타낸다. 평형행렬 \mathbf{A} 는 트러스 구조물의 절점에서 작용하는 힘 \mathbf{f} 과 부재력 \mathbf{q} 의 관계를 나타내는 행렬로 다음의 관계를 가진다.

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2)$$

또한, 축 강성 대각행렬 \mathbf{G} 는 강성행렬(stiffness matrix)의 대각행렬을 의미하며, \mathbf{G} 의 성분 G_{ij} 은 다음과 같이 나타낸다.

$$G_{ij} = \frac{E_i A_i}{L_i} \text{ for } i=j \quad (3a)$$

$$G_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j \quad (3b)$$

여기서, E_i 와 A_i 는 i 번째 트러스 부재의 탄성계수와 단면적을 나타낸다.

부재 i 의 DSI는 0.0에서 1.0 사이의 값을 가지며, DSI가 1.0이라는 것은 해당 부재가 변형에 완전히 구속되어 있어 제거하여도 하중 지지에 아무런 영향을 주지 않는 여유(잉여) 상태를 의미한다. 반대로, DSI가 0.0이면 부재가 변형에 자유로우며, 제거될 경우 구조물의 부분적 또는 전체적 파괴를 초래할 수 있는 매우 중요한 상태를 의미한다. 부재 i 의 단면적이 A_i 일 경우, 다른 부재 j 가 가지는 DSI는 여유도 행렬 \mathbf{R} 의 j 번째 대각성분에 해당하며, $\gamma_j^i(A_i)$ 로 표시한다. $\gamma_j^i(A_i)$ 는 부재 i 의 단

면적이 A_i 일 경우, 부재 i 의 DSI를 나타내며, 여유도 행렬 \mathbf{R} 의 i 번째 대각선 성분이다. 참고로, 정정 구조물은 모든 부재의 DSI 값은 0이 되므로, 이를 적용할 수 없으며, 부정정 구조물에만 적용된다. 시스템 내 모든 부재의 DSI 총합은 부재들의 단면적에 상관없이, 구조물의 부정정 차수와 동일하다. 따라서, 부재 i 의 단면적 A_i 를 증가시키면 하중 지지에 중요한 역할을 하게 되어 자신의 DSI (즉, $\gamma_i^i(A_i)$)는 감소하게 된다. 이때 시스템 전체의 DSI 총합을 일정하게 유지하기 위해, 다른 부재들의 DSI (즉, $\gamma_j^j(A_i)$)는 증가하게 된다. 결과적으로, $\gamma_j^j(A_i)$ 의 변화량은 $\gamma_i^i(A_i)$ 의 변화량과 비례한다.

2.2 부재 여유도 지수(MRI)

시스템 내 부재들은 각각 위치와 하중을 지지하는 정도가 다르기 때문에, 어떤 부재는 크게 단면적을 증가시켜도 다른 부재들의 DSI를 미소하게 변화시키는 반면, 어떤 부재는 큰 변화를 유발할 수 있다. 즉, 부재마다 DSI가 변할 수 있는 최대 범위가 다르다. 따라서, 단순히 절대적인 DSI 변화량만으로는 부재 간의 여유도를 비교하기 어렵다. 이를 위해, 각 부재가 발휘할 수 있는 최대 잠재적 변화량을 0에서 100 사이의 동일한 스케일로 정규화할 필요가 있다. MRI는 DSI의 변화량에 대한 정규화된 값이며, $\gamma_j^j(A_i)$ 에 대한 MRI $M_j^i(A_i)$ 는 다음과 같이 계산한다^[12].

$$M_j^i(A_i) = \left(\frac{\gamma_j^j(A_i) - \gamma_j^j(0)}{\gamma_j^j(\infty) - \gamma_j^j(0)} \right) \times 100 \quad (4)$$

$\gamma_j^j(A_i)$ 의 변화량은 $\gamma_i^i(A_i)$ 의 변화량이 비례하므로, Eq. (4)의 MRI $M_j^i(A_i)$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$M_j^i(A_i) = (1 - \gamma_i^i(A_i)) \times 100 \quad (5)$$

Eq. (5)에서와 같이 $M_j^i(A_i)$ 는 $\gamma_i^i(A_i)$ 로 구성되기 때문에 부재 i 의 단면적이 A_i 일 경우, 부재 j 의 MRI는 부재 i 의 MRI와 동일하며 이를 다음과 같이 $M_i(A_i)$ 로 표현한다^[12].

$$M_i(A_i) = M_i^i(A_i) = M_j^i(A_i) \quad (6)$$

MRI는 부재 i 의 단면적 변화에 따라 발생하는 DSI 변화량을 해당 부재가 가질 수 있는 최대 잠재적 DSI 변화량으로 정규화한 값이다. 따라서, $M_i(A_i)=0$ 은 부재 i 의 단면적이 0인 기준 상태와 동일하여, 단면적 증가에 따른 DSI 변화가 발생하지 않은 상태를 의미한다. 반면, $M_i(A_i)=100$ 은 부재 i 의 단면적이 무한히 커지는 최대 DSI 변화가 모두 발생한 상태를 의미한다. 즉, MRI가 0에 가까울수록 해당 부재 자체가 구조시스템 내에서 완전 여유 상태에 있음을 뜻하여 단면 변화가 전체 여유도 분포에 미치는 영향이 작음을 나타내고, 100에 가까울수록 해당 부재가 발휘할 수 있는 최대 수준의 여유도 재분배 효과에 가까워짐에 따라 비여유 상태의 핵심 중요 부재가 되었음을 나타낸다.

2.3 DSI와 MRI 적용 예시

부재 여유도를 나타내는 DSI와 MRI를 Fig. 1에 제시된 1차 부정정 트러스 구조에 적용한다. 여기서, 6개의 트러스 부재에 동일한 탄성계수를 적용하며, 부재 i 의 단면적 A_i 변화에 따른 DSI $\gamma_j^j(A_i)$ 를 계산하기 위해, 부재 i 를 제외한 나머지 부재의 단면적은 모두 1 cm^2 로 고정하였다. DSI $\gamma_i^i(A_i)$ 와 $\gamma_j^j(A_i)$ 는 앞서 설명한 바와 같이 Eq. (1)에서 정의된 여유도 행렬 \mathbf{R} 의 대각성분으로 산정하였다.

Fig. 2는 부재 1, 부재 3, 그리고 부재 5의 단면적이 0 cm^2 에서 2 cm^2 으로 변화할 때, 해당 부재 및 나머지

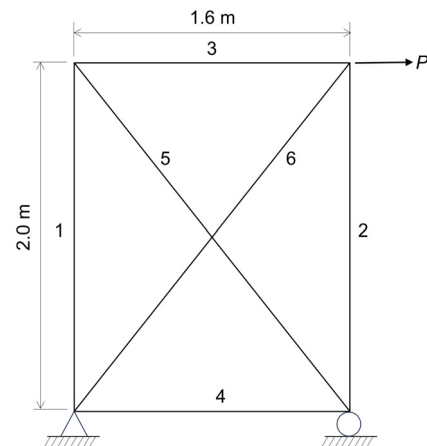
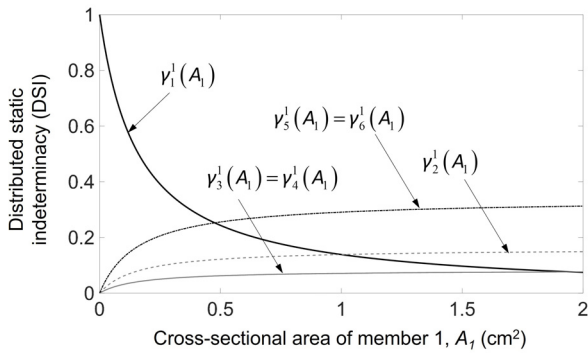
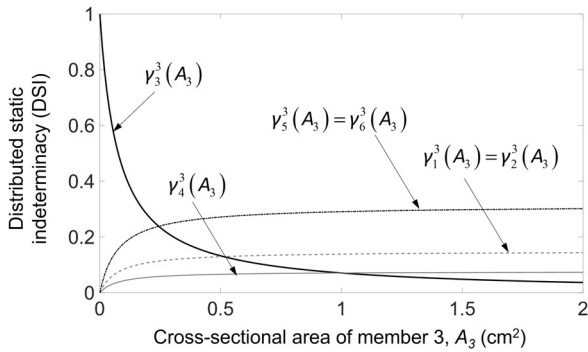


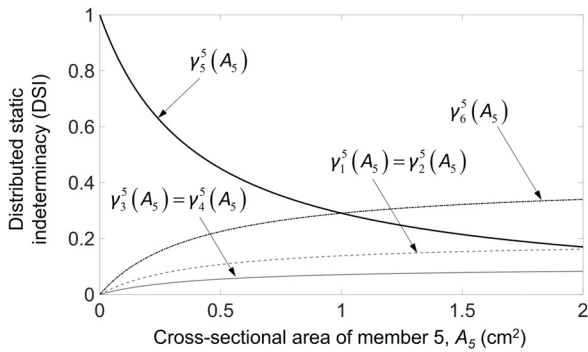
Fig. 1. A six-bar truss



(a) Member 1



(b) Member 3



(c) Member 5

Fig. 2. DSI of six members with variation in the cross-sectional area of members 1, 3, and 5

부재의 DSI $\gamma_i^i(A_i)$ 와 $\gamma_j^i(A_i)$ 의 변화를 나타낸다. 예를 들어, 부재 1의 단면적이 0 cm^2 에서 2 cm^2 으로 변화하는 경우, Fig. 2(a)에서 보는 바와 같이, 해당 부재의 DSI $\gamma_1^1(A_1)$ 는 1에서 지속적으로 감소하여, 다른 부재의 DSI $\gamma_j^1(A_1)$ 는 0에서 증가한다. 또한, 모든 부재의 DSI 합은 1이 되는데, 이는 Fig. 1의 트러스 구조물의 부정정 차수와 일치한다. 한편, $A_i=0 \text{ cm}^2$ 일 때, $\gamma_i^i(A_i)=1$ 이 되며, 이는 부재 1이 하중 지지에 아무런 역할을 하지 않는 여유(잉여) 상태임을 의미한다. 이 경우 Fig. 1의 트러스

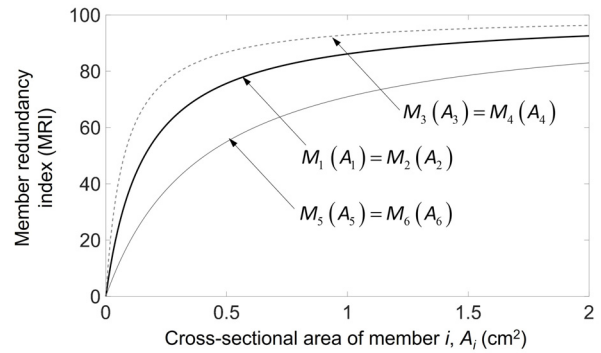


Fig. 3. MRI of six members with variation in the cross-sectional area

구조물은 정정구조물이 되며, 부재 1을 제외한 다른 어느 하나의 부재가 제거될 경우 구조물의 전체적 파괴를 초래한다. 이는 부재 1 이외의 다른 부재들의 $\gamma_j^1(A_1)$ 는 0이 되며, 이들 부재가 필수 상태에 있음을 의미한다.

Fig. 2(b)와 Fig. 2(c)는 부재 3 또는 부재 5의 단면적 변화에 따른 다른 부재들과의 상대적 여유도 변화가 Fig. 2(a)와 유사한 경향을 보임을 나타낸다. 또한, 부재 1과 부재 2, 부재 3과 부재 4, 부재 5와 부재 6은 서로 동일한 $\gamma_i^i(A_i)$ 와 $\gamma_j^i(A_i)$ 의 값을 가지므로, Fig. 2에서는 부재 1, 부재 3 그리고 부재 5의 $\gamma_i^i(A_i)$ 와 $\gamma_j^i(A_i)$ 변화만을 나타내었다.

Fig. 3는 Fig. 1의 6개 부재 트러스에서 각 부재의 단면적 증가에 따른 MRI의 변화를 나타낸다. 부재 1과 부재 2, 부재 3과 부재 4, 그리고 부재 5와 부재 6은 구조적 대칭성으로 인해 각각 동일한 MRI를 갖는다. 그러나, 동일한 단면적 증가에 대해서도 단면이 변화하는 부재의 위치와 하중 지지 역할에 따라 MRI 값은 서로 다르게 나타난다. Fig. 3에서 부재 3 또는 부재 4의 MRI가 가장 크게 나타나며, 부재 1 또는 부재 2가 그 다음으로 크고, 부재 5 또는 부재 6의 MRI가 가장 작게 나타난다. 이는 부재 3 또는 부재 4의 단면적 변화가 구조시스템 내 DSI 분포 변화에 가장 큰 영향을 미치며, 여유도 분포와 재료 배분에 상대적으로 민감하게 작용함을 의미한다.

3. 구조시스템 여유도

구조시스템 여유도를 정량적으로 평가하기 위해 결정론적 및 확률론적 지표들이 사용되며, 이러한 지표들

은 다양한 형태로 정의된다. 결정론적 여유도 지표는 다음과 같다^{[2],[3]}.

$$R_{d,1} = \frac{L_{dmg}}{L_{int}} \quad (7a)$$

$$R_{d,2} = \frac{L_{int}}{L_{int} - L_{dmg}} \quad (7b)$$

여기서, L_{int} =비손상 구조물의 내하력(load carrying capacity), L_{dmg} =손상 후 잔존 내하력. $R_{d,1}$ 은 비손상 상태 대비 손상된 구조물의 하중 지지 능력으로, 0보다 클 수록 여유도가 크다는 것을 의미한다. 또한, $R_{d,2}$ 는 비손상 구조물의 하중 지지 능력과 손상된 구조물의 하중 지지 능력의 차이가 적을수록 여유도가 크다는 것을 나타내며, 0보다 큰 값을 가진다.

Fig. 4는 Fig. 1의 트러스에 하중 P 가 작용할 때 각 부재에 발생하는 부재력의 변화를 나타낸다. 이때, 모든 부재의 단면적 $A=2.0 \text{ cm}^2$, 탄성계수 $E=210 \text{ GPa}$, 항복 응력 $f_y=250 \text{ MPa}$ 로 가정하였다. Fig. 4의 부재력은 절대값으로 표시하였으며, 응력-변형률 관계는 탄소성으로 고려하였다. P 가 증가함에 따라 부재 6의 부재력이 가장 크게 나타나며, 하중 P 가 54.71kN에서 부재 6이 항복에 도달한다. 이후, 하중 P 가 더 증가하더라도 부재 6의 부재력은 더 이상 증가하지 않고 $F_y=A \times f_y=50 \text{ kN}$ 으로 유지된다. 이후, 하중 재분배에 의해 다른 부재의 부재력이 증가하며, 특히, 부재 5의 부재력이 증가하여, 하중 $P=62.5 \text{ kN}$ 에서 항복상태에 도달한다. 그 결과 구조물은 더 이상의 추가 하중을 지지하지 못하고 파괴

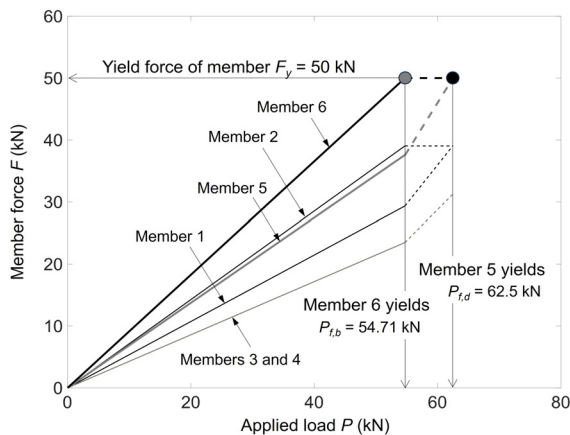


Fig. 4. Relation between applied load and member forces

에 이르게 된다.

트러스 구조 부재 중 하나가 항복에 도달한 경우를 손상 상태로 간주하면, Fig. 4에서 $P=54.71 \text{ kN}$ 은 Eq. (7)의 L_{int} (비손상 구조물의 내하력)에 해당하고, $62.5 \text{ kN}-54.71 \text{ kN}=7.79 \text{ kN}$ 은 L_{dmg} (손상 구조물의 내하력)에 해당한다고 볼 수 있다. 이에 따라, Eq. (7)의 여유도 지표 $R_{d,1}$ 과 $R_{d,2}$ 는 각각 0.142와 1.166이 된다.

확률론적 여유도 지표는 일반적으로 손상 전후 구조물의 파괴확률 또는 신뢰도 변화를 바탕으로 평가된다. 본 연구에서는 Eq. (7)의 결정론적 여유도 지표를 적용하였으며, 보다 상세한 확률론적 여유도 지표의 정의와 적용 방법은 관련 선행연구에서 확인할 수 있다.

4. 최적 단면의 결정

트러스 구조물의 최적 단면적을 결정하기 위해 목적함수로 구조물의 부피 최소화를 적용하고, 설계변수로 트러스 부재의 단면적, 제한조건으로 트러스 부재의 신뢰도 $p_{s,i}$, 부재 여유도 지수 M_i , 그리고 구조시스템 여유도 지표 $R_{d,1}$ 을 적용한다. 이를 수식으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\text{Find } \mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \quad (8a)$$

$$\text{to minimize } Vol(\mathbf{A}, \mathbf{L}) \quad (8b)$$

$$\text{such that } A_{min} \leq \mathbf{A} \leq A_{max} \quad (8c)$$

$$p_{s,i} \geq p_{s,th} \quad (8d)$$

$$M_i \geq M_{th} \quad (8e)$$

$$R_{d,1} \geq R_{d,th} \quad (8f)$$

여기서, A 는 설계변수인 각 트러스 부재의 단면적 A_i 로 구성된 벡터, Vol 는 트러스 부재의 총 부피, A_{min} 과 A_{max} 는 최소 및 최대 허용단면적이며, 그리고 $p_{s,th}$, M_{th} , $R_{d,th}$ 는 각각 최소 요구 신뢰도, 부재 여유도 지수, 구조시스템 여유도 지표를 나타낸다. 본 논문에서는 두 가지 트러스 구조물을 대상으로 $p_{s,th}$, M_{th} , 및 $R_{d,th}$ 관련 제한조건이 최적 단면에 미치는 영향을 제시하고자 한다.

4.1 6개 부재 트러스에의 적용

트러스 부재 단면 최적화를 위해, Fig. 1에 제시된 6개

부재로 구성된 트러스 구조물을 적용한다. 이때, 트러스 부재에 사용된 강재는 탄성계수 $E=210$ GPa, 항복응력 $f_y=250$ MPa를 적용하였으며, 부재의 신뢰도 $p_{s,i}$ 를 계산하기 위해 다음의 상태함수(state function) g_i 를 사용한다.

$$g_i = F_y - R_i \tag{9}$$

여기서, F_y 는 부재의 항복력이며 R_i 는 작용하중 P 에 의한 부재력을 나타낸다. 작용하중 P 는 평균 50 kN, 표준편차 10 kN인 정규분포를 따르는 확률변수로 가정한다. 또한, 항복응력 f_y 는 평균 250 MPa, 표준편차 25 MPa인 정규분포를 따르는 확률변수로 가정한다. Eq. (9)에서 정의된 상태함수로 부재의 신뢰도 $p_{s,i}$ 를 다음과 같이 계산한다.

$$\hat{p}_{s,i} = P[g_i > 0] = \int_{g_i > 0} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{10}$$

여기서, 확률변수 x 는 Eq. (9)의 F_y 와 R_i 를 나타낸다. Fig. 5는 모든 부재의 단면이 동일한 경우에 대해, Eqs. (8c)와 (8d)를 제한조건으로 적용할 때 부재의 최소 요구 신뢰도 $p_{s,th}$ 에 따른 최적 단면의 변화를 나타낸다. $p_{s,th}$ 가 증가할수록 최적 단면의 크기도 증가함을 알 수 있다.

Fig. 6는 Fig. 1의 트러스에서 부재 1과 부재 2, 부재 3과 부재 4, 그리고 부재 5와 부재 6이 각각 동일한 단면적을 갖는 경우, 제한조건 Eqs. (8c), (8d), (8e)와 (8f)

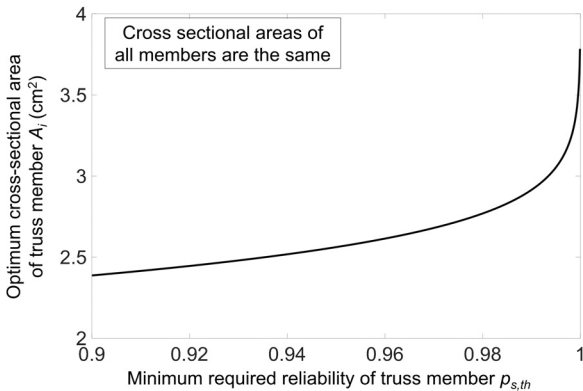
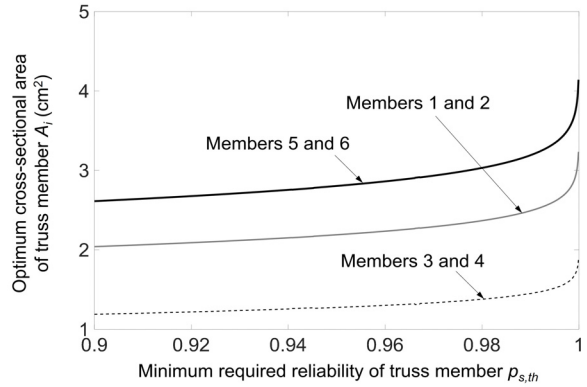
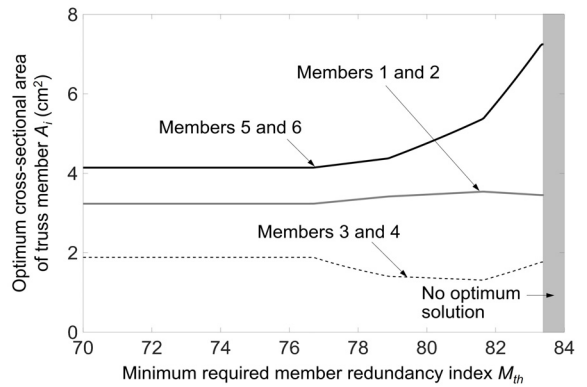


Fig. 5. Optimum cross-sectional area of the truss members presented in Figure 1 for the minimum required reliability of truss member, when all the cross-sectional areas are the same

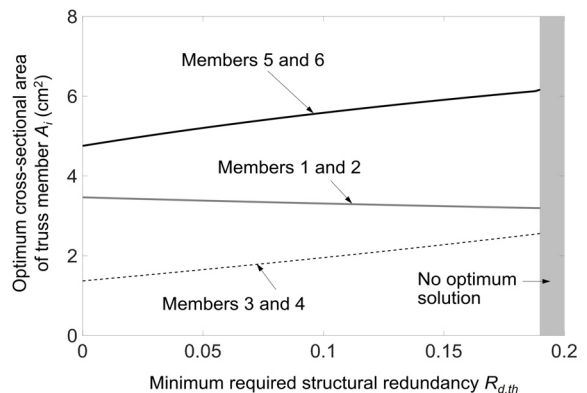
을 적용할 때, 최소 요구 신뢰도 $p_{s,th}$, 최소 요구 부재 여유도 지수 M_{th} , 그리고 최소 요구 구조시스템 여유도 지표 $R_{d,th}$ 의 증가에 따른 최적 단면의 변화를 나타낸다. Fig. 5에서와 같이 Fig. 6(a)에서도 $p_{s,th}$ 의 증가에 따라



(a) Change in minimum required reliability of truss member



(b) Change in minimum required member redundancy



(c) Change in minimum required structural redundancy

Fig. 6. Optimum cross-sectional areas of the truss members presented in Fig. 1 for changes in minimum required member reliability, minimum required member redundancy index, and minimum required structural redundancy, when the cross-sectional areas are grouped into three

최적 단면의 크기가 증가한다. Fig. 6(b)에서는 M_{th} 가 76.7까지 최적 단면적은 일정하게 유지되며, 이후 부재 5와 부재 6의 최적 단면적은 증가한다. 이는, Eq. (8e)의 M_{th} 가 76.70보다 작을 경우 제한조건으로 활성화되지 않음을 의미한다. 반면, 부재 1과 부재 2의 최적 단면적은 다소 증가 후 감소, 부재 3과 부재 4의 최적 단면적은 감소 후 증가한다. 또한, 최적 단면적은 부재 5와 부재 6에서 가장 크고, 부재 3과 부재 4에서 가장 작다. M_{th} 가 83.4보다 클 경우, 제한조건을 만족하는 최적 단면적은 존재하지 않는다. Fig. 6(c)에서는 $p_{s,th}=0.9999$, $M_{th}=80$ 으로 고정할 경우, 최소 요구 구조시스템 여유도 지표 $R_{d,th}$ 와 최적 단면적의 변화를 보여준다. $R_{d,th}$ 의 변화에 따라 부재 5와 부재 6의 최적 단면적이 항상 크게 나타난다. 또한, $R_{d,th}$ 가 0.19보다 큰 경우에는 최적해가 존재하지 않는다.

4.2 10개 부재 트러스에의 적용

10개 부재로 구성된 트러스의 단면 최적화를 위해 Fig. 7에 제시된 트러스 구조물을 적용한다. 부재에 사용된 강재의 탄성계수와 항복응력은 앞선 예제와 동일하며, 수직 방향으로 작용하는 두 개의 하중 P 는 평균 40 kN, 표준편차 10 kN인 정규분포를 따르는 확률변수로 가정한다. 부재 단면의 최적화에서는 부재를 대각선 방향으로 배치된 부재(1, 5, 6, 9), 수평방향으로 배치된 부재(2, 4, 7, 10)와 수직방향으로 배치된 부재(3, 8)로 분류하며, 각 분류에 속한 부재들의 단면적은 동일하게 적용한다.

Fig. 8에서는 Eqs. (8c), (8d), (8e)와 (8f)의 제한조건에 대해 최소 요구 신뢰도 $p_{s,th}$, 최소 요구 부재 여유도 지수 M_{th} , 그리고 최소 요구 구조시스템 여유도 지표 $R_{d,th}$ 의 증가에 따른 최적 단면적의 변화를 나타낸다. Fig. 8(a)에

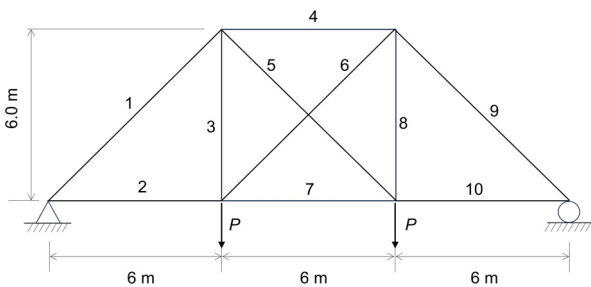
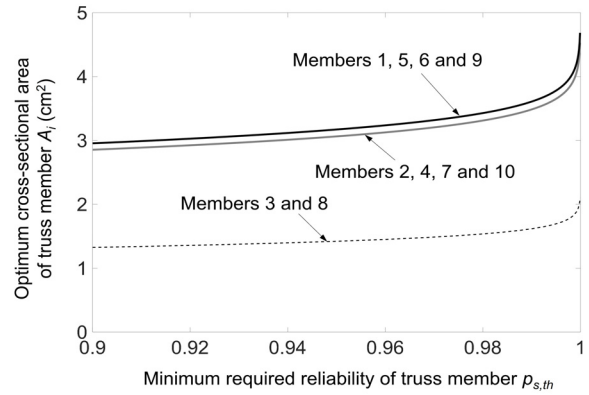
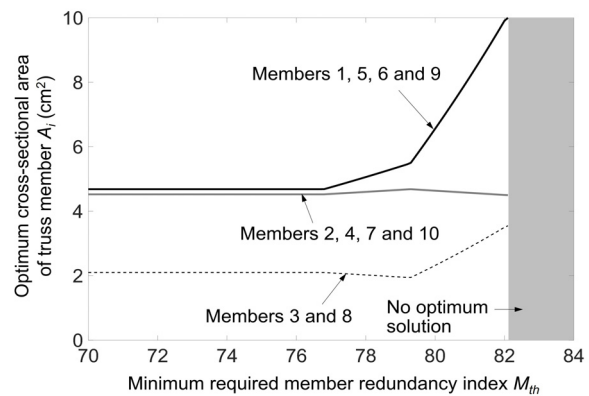


Fig. 7. A ten-bar truss

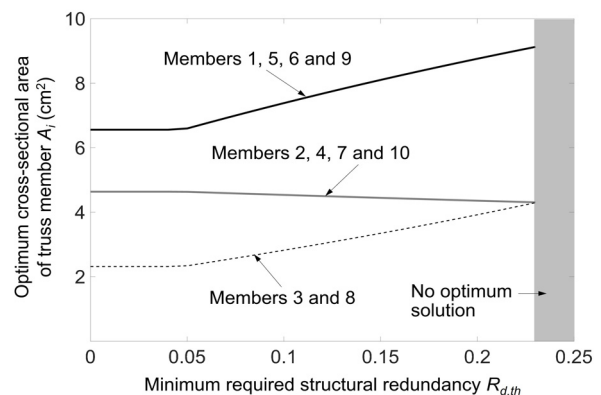
서는 Fig. 6(a)의 경우와 마찬가지로 Eqs. (8c)와 (8d)를 제한조건으로 적용하였으며, $p_{s,th}$ 의 증가에 따라 최적 단면적의 크기가 증가함을 볼 수 있다. 또한, Fig. 8(b)에



(a) Change in minimum required reliability of truss member



(b) Change in minimum required member redundancy



(c) Change in minimum required structural redundancy

Fig. 8. Optimum cross-sectional areas of the truss members presented in Fig. 7 for changes in minimum required member reliability, minimum required member redundancy index, and minimum required structural redundancy, when the cross-sectional areas are grouped into three

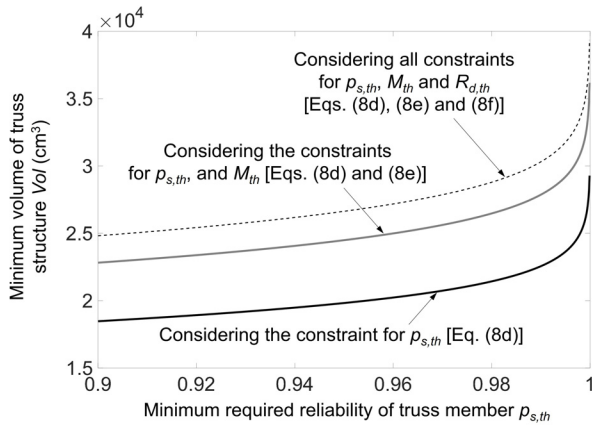


Fig. 9. Comparison of the minimum volume of the truss system presented in Fig. 7 with changes in the minimum required member reliability

서는 $p_{s,th}=0.9999$ 로 고정하고 Eq. (8e)를 추가로 고려할 경우, M_{th} 의 변화에 따른 최적 단면의 변화를 나타낸다. Fig. 8(c)에서는 Fig. 6(c)와 마찬가지로 $p_{s,th}=0.9999$ 와 $M_{th}=80$ 으로 고려한 경우 $R_{d,th}$ 의 변화에 따른 최적 단면의 변화를 나타낸다. Fig. 8에서 최적 단면은 대각선 부재 1, 5, 6, 9가 항상 가장 크며, 수직 부재 3과 수직 부재 8이 항상 작음을 보여준다.

최소 요구 신뢰도 $p_{s,th}$ 의 변화에 따른 트러스 구조의 최소 부피 변화를 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 9은 $p_{s,th}$ 가 0.9에서 0.9999로 변화할 때, Eq. (8d)만을 고려할 경우, 추가로 (8e)의 $M_{th}=80$ 을 제한조건으로 고려한 경우, 그리고 Eq. (8f)의 $R_{d,th}=0.10$ 까지 제한조건으로 추가한 경우를 비교하여 보여준다. 즉, Fig. 9에서는 제한조건의 조합에 따른 최소 부피 변화를 비교한 것이며, Fig. 8에서는 $p_{s,th}$, M_{th} , $R_{d,th}$ 의 개별 변화에 따른 최적 단면적의 변화를 나타낸다는 점에서 차이가 있다. 최소 요구 신뢰도 $p_{s,th}$ 만을 제한조건으로 고려한 경우(즉 Eq. (8d)만을 고려한 경우), 트러스 구조의 부피가 가장 작게 나타난다. 반면, 최소 요구 신뢰도 $p_{s,th}$, 최소 요구 부재 여유도 지수 M_{th} , 그리고 최소 요구 구조시스템 여유도 지표 $R_{d,th}$ 를 모두 제한조건으로 고려할 경우(즉, Eqs. (8d), (8e), 및 (8f)를 모두 적용할 경우), 트러스 구조의 부피가 가장 크게 요구된다.

제한조건 조합이 최적 설계 결과에 미치는 영향을 검토하기 위해 Table 1과 같이 네 가지 해석 Case를 설정하였다. Case 1은 부재 신뢰도 제한조건 Eq. (8d)만을 고려한 경우이며, $p_{s,th}=0.99$ 로 설정하였다. Case 2는

Table 1. Constraints of four cases

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
$p_{s,th}$	0.99	0.99	0.99	0.99
M_{th}	-	80	-	80
$R_{d,th}$	-	-	0.10	0.10

Table 2. Optimum solutions (i.e., cross-sectional areas and the minimum volume) of the ten-bar truss, and the associated minimum member reliability, member redundancy and structural redundancy

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Area (cm ²)				
Members 1, 5, 6, 9	3.61	5.05	4.01	5.69
Members 2, 4, 7, 10	3.49	3.57	3.31	3.50
Members 3, 8	1.62	1.79	2.37	2.18
Volume (cm ³)	22,559.5	27,870.1	24,385.6	30,311.7
Min. $p_{s,i}$	0.99	0.99	0.99	0.99
Min. M_i	76.80	80.00	75.35	80.00
$R_{d,l}$	0.0	0.048	0.10	0.10

Eq. (8d)에 부재 여유도 제한조건 Eq. (8e)를 추가한 경우로, $M_{th}=80$ 을 적용하였다. Case 3은 Eq. (8d)에 구조시스템 여유도 제한조건 Eq. (8f)를 추가한 경우로, $R_{d,th}=0.10$ 을 적용하였다. Case 4는 Eqs. (8d), (8e), 및 (8f)의 모든 제한조건을 동시에 고려한 경우이다.

Table 2에서 보는 바와 같이, Case 1은 Cases 1-4 중 가장 작은 부피인 22,559.5 cm³를 가지며, 최소 부재 여유도 지수는 76.80으로 나타난다. 그러나 이때의 최적 단면을 적용할 경우, 부재 1, 부재 3, 부재 4, 부재 8, 부재 9가 동시에 항복에 도달하여 첫 번째 항복 이후 추가적인 하중지지 능력이 확보되지 않으므로, 구조시스템 여유도 지표값은 0이 된다. Case 2에서는 Eq. (8e)의 $M_{th}=80$ 을 추가로 적용함에 따라 구조물의 부피가 27,870.1 cm³로 증가하며, 구조시스템 여유도 지표값은 0.048로 나타난다. Case 3에서는 Eq. (8e)의 $M_{th}=80$ 대신 Eq. (8f)의 $R_{d,th}=0.10$ 을 적용하였으며, 이 경우 구조물의 부피는 24,385.6 cm³이고 최소 부재 여유도 지수는 75.35로 나타난다. Case 4에서는 모든 제한조건을 동시에 적용함에 따라 가장 큰 부피인 30,311.7 cm³가 요구된다.

5. 결론

본 연구에서는 부재 여유도와 구조시스템 여유도를 동시에 고려한 부정정 트러스의 단면 최적화 방법을 제안하였다. 이를 위해 구조물의 총 부피를 목적함수로 설정하고, 각 부재의 신뢰도, 부재 여유도 지수(MRI), 그리고 구조시스템 여유도 지표를 제한조건으로 포함하는 최적화 문제를 정식화하였다. 또한, 부재 수준의 여유도는 DSI와 MRI를 이용하여 정량화하고, 구조시스템 수준의 여유도는 손상 전후 하중지지능력에 기반한 결정론적 지표를 통해 평가하였다. 이를 6개 부재 트러스와 10개 부재 트러스에 적용하여 제한조건 변화가 최적 단면에 미치는 영향을 검토하였다. 주요 결과는 다음과 같다.

- (1) 최소 요구 신뢰도가 증가할수록 최적 단면의 크기가 증가하였으며, 이는 더 높은 안전성 요구가 더 큰 단면을 필요로 함을 보여준다. 최소 요구 부재 여유도 지수는 일정 수준 이하에서는 활성 제한조건으로 작용하지 않았고, 일정 한계를 넘어서면 최적해가 존재하지 않았다. 최소 요구 구조시스템 여유도 지표 역시 일정 값 이하에서는 최적 단면 변화에 영향을 주지 않았으나, 값이 증가함에 따라 부재 단면의 변화가 발생하며, 일정 한계를 초과하면 만족 가능한 최적해가 존재하지 않았다.
- (2) 부재의 신뢰도, 부재 여유도 지수, 그리고 구조시스템 여유도 지표를 제한조건으로 적용할 경우, 트러스 구조물 부재의 최적 단면 크기가 서로 다르게 나타나며, 더 큰 부피가 요구됨을 확인하였다. 부재의 최소 요구 신뢰도만을 제한조건으로 고려할 경우, 구조시스템 여유도가 부족할 수 있으므로, 최소 요구 부재 여유도 지수와 최소 요구 구조시스템 여유도 지표값을 적절히 함께 고려하여 안전성과 경제성을 균형 있게 확보할 필요가 있다.
- (3) 제시된 결과는 부재 신뢰도, 부재 여유도 지수, 구조시스템 여유도를 동시에 고려하는 것이 트러스 구조물의 단면 설계에 중요한 영향을 미침을 보여준다. 특히, 신뢰도 제한조건은 부재 수준의 안

전성을 확보하고, MRI 제한조건은 하중 지지에 대한 부재별 기여도를 반영하여 재료 분배의 불균형을 완화하며, 구조시스템 여유도 제한조건은 첫 번째 부재 항복 이후의 잔존 내하력을 확보하는 데 기여한다. 따라서 제안된 최적화 방법은 단순한 부피 최소화 설계가 아니라, 경제성, 부재 수준 안전성, 재료 분배의 적절성, 그리고 시스템 수준의 붕괴 저항성을 동시에 고려할 수 있는 설계 방법으로 활용될 수 있다.

- (4) 본 연구에서는 부재의 한계상태를 항복에 기초하여 정의하였으므로, 압축재 좌굴이 지배적인 강재 트러스 구조물에 대해서는 구조시스템 여유도가 과대평가될 수 있다. 따라서 향후 연구에서는 압축재 좌굴강도, 세장비, 유효 좌굴길이 계수 및 단면 2차 모멘트를 고려한 좌굴 제한조건을 최적화 문제에 추가하고, 항복 및 좌굴을 모두 고려한 구조시스템 여유도 평가로 확장할 필요가 있다.
- (5) 본 연구에서는 구조물의 총 부피를 목적함수로 설정하였으나, 실제 설계에서는 단면 종류의 다양성, 특정 부재 단면의 과도한 증가, 제작 및 시공 효율성, 접합부 상세 설계 등이 전체 시공성에 중요한 영향을 미칠 수 있다. 따라서 향후 연구에서는 단면 종류의 제한, 표준 단면 사용, 시공성 및 제작비를 고려한 보다 현실적인 최적 설계 모델로 확장할 필요가 있다.
- (6) 6개 및 10개 부재로 구성된 2D 트러스 예제는 방법론의 적용 가능성을 확인하는 데 유용하지만, 실제 건축물 또는 대형 공간구조물에서 나타나는 복잡한 하중 경로, 높은 부정정 차수, 다수 부재 간 상호작용을 충분히 대표하기에는 한계가 있다. 따라서 향후 연구에서는 부재 수가 많고 부정정 차수가 높은 3D 입체 트러스 및 실제 구조시스템에 제안된 방법을 적용하여, 최적화 알고리즘의 수렴 안정성, 계산 효율성, 그리고 본 연구에서 도출된 최적 단면 및 구조물 부피 변화 경향의 일반성을 추가적으로 검증할 필요가 있다.

감사의 글

본 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한

국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. NRF - 2023R1A2C1007097).

참고문헌(References)

- [1] Mertz, D., and Chavel, B. (2022) *Steel Bridge Design Handbook*, Chapter 9-Redundancy, National Steel Bridge Alliance, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL.
- [2] Frangopol, D.M., and Curley, J.P. (1987) Effects of Damage and Redundancy on Structural Reliability, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.113, No.7, pp.1533-1549.
- [3] Hendawi, S., and Frangopol, D.M. (1994) System Reliability and Redundancy in Structural Design and Evaluation, *Structural Safety*, Elsevier, Vol.16, No.1-2, pp.47-71.
- [4] Frangopol, D. M., and Kim, S. (2021) *Bridge Safety, Maintenance and Management in a Life-Cycle Context*. CRC Press.
- [5] Frangopol, D. M., and Kim, S. (2025) *System Reliability, Risk, Longevity, Sustainability and Optimal Decision Making: Emphasis on Marine Structures*. CRC Press.
- [6] Park, Y.M., Joe, W.D., and Back, S.Y. (2006) Redundancy of the Composite Twin Steel Plate Girder Bridge According to the Dimension and Spacing of Cross Beams, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.18, No.2, pp.137-146 (in Korean).
- [7] von Scheven, M., Ramm, E., and Bischoff, M. (2021) Quantification of the Redundancy Distribution in Truss and Beam Structures, *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, Vol.213, pp. 41-49.
- [8] Pandey, P.C., and Barai, S.V. (1997) Structural Sensitivity as a Measure of Redundancy, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.123, No.3, pp.360-364.
- [9] Ma, S.-S., Kwon, T.-Y., Lee, W.-H., and Ahn, J.-H. (2024) Determining Cable Cross-Section and Stress Level according to Steel Cable-Stayed Bridge Type Using Harmony Search, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.36, No.2, pp.121-132 (in Korean).
- [10] Park, H., You, S., and Kwon, Y. (2024) A Study on Structural Analysis and Design Criteria Improvement for Enhancing Stability of 154kV Transmission Towers in Extreme Environment, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.36, No.5, pp.253-262 (in Korean).
- [11] Yeo, I., Han, H.-S., and Cho, Y.-H. (2025) Performance-Based Optimization of Fire Protection for H-Section Steel Columns under EV Fire Scenarios in Open Car Parks, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.37, No.4, pp.229-239 (in Korean).
- [12] Okasha, N.M., Soliman, M., Kim, S., Frangopol, D.M., and Alzo'ubi, A.K. (2023) A Member Redundancy Index Based on Distributed Static Indeterminacy for Optimum Material Distribution for Structures with Axially Loaded Members, *Engineering Structures*, Elsevier, Vol.293, 116654.

요약: 본 논문에서는 부재 여유도와 구조시스템 여유도를 동시에 고려한 트러스 단면 최적화 방법을 제시한다. 최적화 문제는 구조물의 부피를 최소화하면서 부재 신뢰도, 부재 여유도 지수, 구조시스템 여유도 지표를 만족하도록 정식화하였다. 부재 여유도는 분포된 정적 부정정과 부재 여유도 지수를 이용하여 평가하였고, 구조시스템 여유도는 부재 항복 후 잔존 내하력에 기반한 결정론적 지표로 평가하였다. 6개 및 10개 부재 트러스 적용 결과, 요구 신뢰도와 여유도가 증가할수록 최적 단면과 구조물 부피가 증가하고 부재별 재료 분배도 변화하는 것으로 나타났다.

핵심용어: 부재 여유도, 최적화, 구조시스템 여유도, 신뢰도, 트러스
