

일축 대칭 단면을 갖는 외부 긴장 강재 보의 횡-비틀 좌굴에 대한 유한요소해석

김문영¹ · 아가 인티자르 메디² · 김성보^{3*}

¹교수, 성균관대학교, 건설환경공학부, ²박사과정, 성균관대학교, 건설환경공학부, ³교수, 충북대학교, 토목공학부

FE Analysis on Lateral Torsional Buckling of Externally Prestressed Mono-Symmetric Steel Beams

Kim, Moon Young¹, Mehdi, Agha Intizar², Kim, Sung Bo^{3*}

¹Professor, School of Civil, Architectural Engineering & Landscape Architecture, Sungkyunkwan University, Suwon, 16419, Korea

²Graduate Student(Ph.D. Course), School of Civil, Architectural Engineering & Landscape Architecture, Sungkyunkwan University, Suwon, 16419, Korea

³Professor, School of Civil Engineering, Chungbuk National University, Cheongju, 28644, Korea

Abstract - A finite element analysis is performed for lateral-torsional buckling (LTB) behavior of externally pre-stressed (PS) mono-symmetric steel beam under compression and end moments. A generalized finite element analysis for LTB behavior is presented by applying the total potential energy of a simple/cantilever PS steel beam including the pre-stressed effect acting on the external tension member. LTB characteristics of simple and cantilever PS mono-symmetric beams are investigated by varying the number of deviators, initial pre-stress, mono-symmetry cross-section types, and number of PS tendons. FE solutions on LTB of mono-symmetric thin-walled steel beams are compared with the exact solutions in the literature.

Keywords - Finite element analysis, Lateral torsional buckling, Mono-symmetric, Steel beam, Prestressed

1. 서론

외력에 의한 박벽(thin-walled) 보의 불안정성은 전체 구조물의 붕괴를 유발할 수 있으므로 강교량 및 건축물의 설계에서 전통적으로 다루어지는 중요한 문제이다. Vlasov^[1], Timoshenko and Gere^[2], Trahair^[3]는 비대칭 단면을 갖는 박벽 보의 좌굴 이론을 정립하였다. Kim and Kim^[4]은 변단면 박벽 보와 공간 뼈대의 안정성을 위한 개선된 이론을 제시하였다. Erkmen and Attard^[5]는 전단 변형 효과를 고려한 박벽 보의 횡-비틀 좌굴(LTB) 거동을 분석하였다. 또한, Sahraei *et al.*^[6]은 전단 변형 효과를

고려하여 대칭 단면을 갖는 박벽 보의 횡-비틀 좌굴 해석을 위한 유한요소해석기법을 제시하였다.

최근 들어 초기 긴장력이 도입된 PS(prestressed) 강재 보의 구조적 안정성에 대한 문제가 제기되었다. PS 강재 보/기둥은 길이에 따라 설치된 텐던 케이블 및 편향부(deviator)로부터 도입되는 사전 응력을 받는 강구조물로 취급될 수 있다. 횡변위와 비틀림변위가 구속된 지점 사이의 길이인 비지지 길이가 증가할수록 보/기둥의 횡-비틀 좌굴 강도가 현격히 감소한다는 점은 널리 알려진 사실이며, 텐던에 의하여 외부 긴장력이 도입되는 PS 보/기둥에서는 텐던이 거처되는 편향부에서 강재 보의 횡변위와 비틀림변위가 구속되는 효과가 발생한다. 즉, 편향부를 도입함으로써 횡-비틀림 변위가 구속되는 비지지 길이가 감소하여 PS 보/기둥의 횡-비틀 좌굴 강도가 크게 증가하는 장점을 지닌다.

PS 보/기둥의 좌굴 특성에 대한 연구로서, Belenya^[7]는 초기 응력을 받는 강재 보의 임계 하중을 도출하였고, Wade *et al.*^[8]은 외부에서 도입되는 프리스트레스 케이

Note.-Discussion open until October 30, 2023. This manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on October 18, 2022; revised on November 28, 2022; approved on November 28, 2022.

Copyright © 2023 by Korean Society of Steel Construction

*Corresponding author.

Tel. +82-43-261-3241 Fax. +82-43-275-2377

E-mail. sbkim@chungbuk.ac.kr

블이 적용된 압축 부재의 좌굴 이론을 발표하였다. 좌/우에서 교차하는 편향부로부터 도입되는 초기 응력을 받는 스테이드 기둥(stayed column)의 좌굴 거동과 공학적 응용을 위한 요구사항은 다양한 연구자에 의해 해석적 및 실험적으로 연구되었다^{[9]-[11]}. Park *et al.*^[12]은 지간 중앙에 단일 편향부를 갖는 비접착(unbonded) 텐던에 의한 사전 응력을 받은 강재 보의 휨강도를 실험적으로 분석하였다. Belletti and Gasperi^[13]는 4절점 쉘 요소를 적용하는 비선형 유한요소모델을 사용하여 약 40 m의 지간 길이를 갖는 PS 강 거더의 파괴 거동을 집중적으로 분석하였다. Ghafoori and Motavalli^[14]는 실험적·수치적 기법을 사용하여 서로 다른 프리스트레스 수준을 갖는 CFRP 적층으로 보강된 강재 보의 횡-비틀 좌굴 거동을 평가하였다. Kambal and Jia^[15]는 PS 박스 거더의 휨 거동을 추적하기 위한 유한요소해석기법을 개발하고 분석결과를 실험값과 비교하였다. Ren *et al.*^[16]은 다수의 PS 텐던이 배치된 보의 휨 거동을 분석하였고, Khosla^[17] 및 Hatout^[18]은 FEM을 이용하여 PS 스테이드 기둥의 좌굴 특성에 대한 수치해석을 수행하였다. Yang *et al.*^[19]은 외부 긴장된 H-형강의 휨거동을 분석하였고, Jung and Yoon^[20]은 다양한 조건을 갖는 PT 스트랜드의 연결부 특성을 파악하였으며, Kim *et al.*^[21]은 대칭단면을 갖는 PS 강재 보의 면내/면외 좌굴에 대한 유한요소해석 이론을 발표하였다. 특히, Kim *et al.*^[22]은 이중 대칭 및 일축 대칭 단면을 갖는 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 거동에 대한 엄밀해를 도출하고, 외부편향부의 설치를 통하여 PS 보의 좌굴강도를 크게 향상시킬 수 있음을 입증하였다. Zhang^[23]은 Euler-보 이론과 Kirchhoff-판 이론을 기반으로 하는 해석적 접근을 사용하여 균일한 모멘트를 받고 대칭 및 비대칭 단면을 갖는 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 공식을 유도하였다. Kim *et al.*^[24]은 편향부 효과를 고려하여 단순/캔틸레버 PS 보의 휨 좌굴 및 대변위 해석 이론을 발표하였다. 또한, Kim *et al.*^{[25],[26]}은 압축력과 균일한 모멘트를 받는 대칭 단면을 갖는 단순/캔틸레버 PS 강재 보에 대한 새로운 횡-비틀 좌굴 이론을 제시하였다.

이 논문에서는 압축력과 균일한 휨모멘트를 받고 외부에서 도입되는 긴장력이 작용하는 일축 대칭 단면을 갖는 강재 보의 횡-비틀 좌굴해석을 위한 유한요소해석 이론을 제시하였다. 축력과 균일한 모멘트 하중 조건에서 긴장력이 도입되는 텐던의 영향을 고려하여 편향부가 있는 총 포텐셜 에너지를 적용하였다. 비접착/접착 조건에

서 총 포텐셜 에너지를 기반으로 횡-비틀 좌굴에 대한 유한요소해석기법을 제시하였다. 결과적으로 일축 대칭 단면을 갖는 PS 보의 횡-비틀 좌굴에 대한 유한요소해석을 수행하고 문헌에서 발표된 엄밀해와 비교/분석하였다.

2. 일축 대칭 단면을 갖는 외부 긴장 PS 보

Fig. 1(a)는 프리스트레싱 이전에 2개의 편향부와 직선 텐던이 있는 강재 보이다. 여기서 l 은 강재 보의 길이, l_c 는 긴장력이 도입되기 이전 텐던의 무응력 길이를 나타낸다. Fig. 1(b)는 초기 장력 H_o 에 의하여 단순지지된 PS 강재 보의 변형된 형상이고, Fig. 1(c)는 초기 장력이 도입된 후 압축력과 휨모멘트에 의해 변형된 PS 강재 보이다.

PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 문제를 정식화하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

- (1) 편향부는 강재 보와 강결로 연결되어 텐던의 변위는 연결부에서의 강재 보의 변형에 의존한다.
- (2) 텐던의 초기 긴장력 H_o 은 PS 강재 보 전체 길이에 따라 일정하다.
- (3) 편향부와 텐던의 접촉은 접착(bonded) 또는 비접착(unbonded) 상태에 놓인다.
- (4) 횡-비틀 좌굴이 발생하기 이전의 변형은 무시한다.

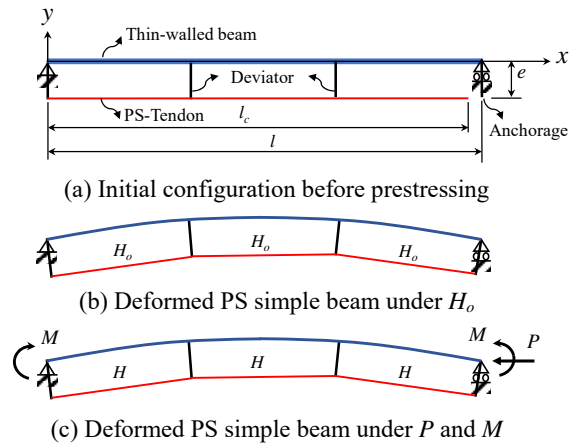


Fig. 1. Simple PS beam with two deviators

PS 강재 보의 단부 지지조건으로 단순지지되어 있는 경우를 ‘SB’, 일단고정-일단자유인 경우를 ‘CB’라고 표기한다. x, y, z 축 방향으로의 변위성분을 각각 u, v, w 라고 하고, 단면의 도심점에서 비틀 회전각을 θ 로 나타내면 두 가지 지지조건에 대한 경계조건은 식 (1)과 같다.

• SB: $w_0 = \theta_0 = 0; w_l = \theta_l = 0$ (1a)

• CB: $w_0 = \theta_0 = 0; w'_l = \theta'_l = 0$ (1b)

여기서, 위첨자 '은 부재축에 대한 미분을 의미하고, 아래첨자 o 와 l 은 각각 부재 시작점($x = 0$)과 끝점($x = l$)을 나타낸다. Fig. 1(b)와 Fig. 1(c)의 면내 변위 u, v 는 각각 초기 장력과 외부 하중에 의한 전체 변형 효과로 나타나고, 횡-비틀 좌굴상태에서 면외 횡변위와 비틀림변위 w, θ 가 발생한다. PS 강재 보의 좌굴을 유발하는 하중조건은 다음의 세 가지 경우를 고려한다.

- (1) LC1: 텐던의 초기긴장력 H_o 만 재하되는 경우
- (2) LC2: 텐던의 초기긴장력 H_o 와 압축력 P 는 작용하고, 휨모멘트는 재하되지 않는 경우
- (3) LC3: 텐던의 초기긴장력 H_o 와 부재 단부에서 휨모멘트 M 은 작용하고, 압축력은 작용하지 않는 경우

3. 일축 대칭 PS 강재 보의 총 포텐셜 에너지

외력으로 재하되는 축력 P 와 휨모멘트 M 의 영향으로 PS 강재 보에 발생하는 부재 내력은 축력 F_1 , 전단력 F_2 , 휨모멘트 M_3 및 텐던의 장력 H 가 발생한다. Kim *et al.*^[26]은 압축력과 균일한 모멘트를 받는 PS 강재 보에 대하여 총 포텐셜 에너지를 식 (2)와 같이 도출하였다.

$$\Pi^U = \Pi_B + \frac{EA_c}{2l_c}(w'_{mq} - w'_{1p})^2 b^2 + H \sum_{i=1}^m \left(\frac{(\theta_{iq} - \theta_{ip})^2 b^2}{2l_i} + \frac{(w_{iq} - w_{ip} + \theta_{ip}e - \theta_{iq}e)^2}{2l_i} \right) \quad (2a)$$

$$\Pi^B = \Pi_B + \sum_{i=1}^m \frac{EA_c}{2l_{ci}}(w'_{iq} - w'_{ip})^2 b^2 + \sum_{i=1}^m H_i \left(\frac{(\theta_{iq} - \theta_{ip})^2 b^2}{2l_i} + \frac{(w_{iq} - w_{ip} + \theta_{ip}e - \theta_{iq}e)^2}{2l_i} \right) \quad (2b)$$

여기서,

$$\Pi^B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^{l_i} \left[EI_2 w_i''^2 + GJ \theta_i'^2 + EI_\phi \theta_i''^2 + EI_{2\phi} w_i'' \theta_i'' + F_1 (w_i'^2 + \beta_1 \theta_i'^2) - 2M_3 w_i' \theta_i' + \beta_3 M_3 \theta_i'^2 \right] dx_i \quad (2c)$$

식 (2)에서, EI_2, GJ, EI_ϕ 는 각각 x_2 축에 대한 휨강성, 비틀강성, 도심에 대한 뒹(warping)-비틀강성; $e_2 =$ 전단중심의 x_2 축 좌표; $A_c =$ 텐던의 총단면적; $F_1, M_3 =$ 축력과 x_3 축

에 대한 휨모멘트; $H, H_i =$ 비접착 텐던의 장력과 접착 텐던의 i 번째 구간 텐던 장력; $I_{2\phi} = e_2 I_2$; $\beta_1 = (I_2 + I_3)/A$; $\beta_3 = -\frac{1}{I_3} \int_A y(y^2 + z^2) dA$; $w_{ip} = w_i(0)$; $\theta_{iq} = \theta_i(l_i)$; $b =$ 단면 내에서 두 텐던 사이의 간격이다. 위첨자 U, B 는 텐던과 편향부의 연결조건에서 각각 비접착(unbonded)과 접착(bonded) 편향부를 의미한다.

텐던과 편향부의 접착/비접착 두 가지 조건에 대한 총 포텐셜 에너지 식 (2)를 적용하면, 초기긴장력(H_o), 압축력(P), 휨모멘트(M)를 받는 PS 강재 보의 면내 변형에 대한 선형해석을 수행할 수 있으며, 초기긴장력(H_o), 압축력(P), 휨모멘트(M)에 의한 텐던의 장력(H)은 식 (3)과 같이 도출된다.

$$H = H_o - C_P P + C_M M \quad (3a)$$

여기서,

$$C_P = \frac{I_3}{A} C, \quad C_M = eC, \quad C = \frac{EA_c H_o}{EI_3 + EA_c \left(e^2 + \frac{I_3}{A} \right)} \quad (3b)$$

결과적으로 부재력 성분인 축력, 휨모멘트 및 전단력은 식 (4)와 같다.

$$F_1 = -H - P, \quad M_3 = M - He, \quad F_2 = 0 \quad (4)$$

전 장에서 기술한 세 가지 외력 조건에서 부재력에 대한 면내 선형해석결과를 Table 1에 제시하였다.

Table 1. Internal force distributions of PS beam

Load case	H, H_i	F_1	M_3	F_2
LC1	H_o	$-H_o$	$-H_o e$	0
LC2	$H_o - C_P P$	$-H_o + C_P P - P$	$-H_o e + C_P P e$	0
LC3	$H_o + C_M M$	$-H_o - C_M M$	$M - H_o e$	0

4. 일축 대칭 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 유한요소해석

본 장에서는 PS 강재 보의 좌굴 안정성에 대한 유한요소해석에 대한 정식화 과정을 기술하였다. Fig. 2는 텐던의 편심(e)이 있으며 축력과 휨모멘트를 받는 캔틸레버 PS 강재 보이다.

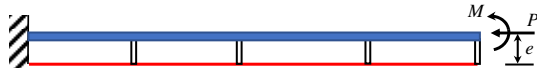


Fig. 2. PS cantilever beam with deviators under P and M

텐션의 포텐셜 에너지를 강재 보의 변위성분에 대하여 유도하였기 때문에 강재 보만 유한요소해석모델에 포함된다.

Fig. 3는 m 개의 분할구간과 각 분할구간에서 n 개의 박벽 보 요소로 모델링되어 총 $N(=m \times n)$ 개의 유한요소로 이산화된 PS 강재 보이다. 각 분할구간에서 절점의 수는 $n+1$ 개이고 전체 모델에서 총 절점 수는 $N+1$ 개이다. 또한, Fig. 4는 횡-비틀 좌굴해석을 위한 절점 당 네 개의 자유도(4-DOF, 면외 횡변위, 면외 회전변위, 비틀림변위, 뒹[warping]변위) 성분을 가진 요소이다. 일반적으로 공간 박벽 보 요소의 절점 당 자유도는 7개이지만, 좌굴 발생 이전의 변형을 무시하는 횡-비틀좌굴에 대한 유한요소해석의 경우, 축변위 1개와 면내 휨변위 성분 2개를 제외한 4개의 변위성분이 적용된다.

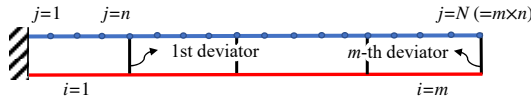


Fig. 3. FE modeling of PS beams

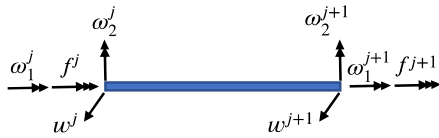


Fig. 4. j -th thin-walled beam element

식 (2)로부터 축력(P) 및 휨모멘트(M)를 받는 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴거동에 대한 총 포텐셜 에너지는 비접착/접착 조건에 대하여 아래의 식 (5)와 같다.

$$\Pi^U = V_B + V_T^U \quad (5a)$$

$$\Pi^B = V_B + V_T^B \quad (5b)$$

여기서,

$$V_B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j} \begin{bmatrix} EI_2 W_j''^2 + EI_\phi \theta_j''^2 + GJ \theta_j'^2 \\ + 2EI_{2\phi} W_j'' \theta_j' \\ + F_1^j (W_j'^2 + \beta_1 \theta_j'^2) \\ - M_3^j (2W_j' \theta_j' - \beta_3 \theta_j'^2) \end{bmatrix} dx_j \quad (6a)$$

$$V_T^U = \frac{EA_c b^2}{2l_c} (\omega_2^{N+1} - \omega_2^1)^2 + \sum_{i=1}^m \frac{H}{2l_i} \left[\left(\omega_1^{in+1} - \omega_1^{in-n+1} \right)^2 + \left(W^{in+1} - \omega_1^{in+1} e - W^{in-n+1} + \omega_1^{in-n+1} e \right)^2 \right] \quad (6b)$$

$$V_T^B = \sum_{i=1}^m \left[\frac{EA_c b^2}{2l_{ci}} (\omega_2^{in-n+1} - \omega_2^{in+1})^2 + \frac{H_i}{2l_i} (\omega_1^{in-n+1} - \omega_1^{in+1})^2 b^2 + \frac{H_i}{2l_i} \left(W^{in+1} - \omega_1^{in+1} e - W^{in-n+1} + \omega_1^{in-n+1} e \right)^2 \right] \quad (6c)$$

식 (6)에서, $in = i \times n$; $d_j = j$ 번째 보 요소의 길이를 나타낸다. j 번째 요소의 면외 절점변위벡터를 \mathbf{d}_j 로 정의하고, $\omega_2 = -w'$, $\omega_1 = \theta$, $f = -\theta'$ 의 관계를 적용하면, 면외 횡변위 w 와 비틀림변위 θ 는 아래와 같이 3차 Hermitian 다항식을 이용하여 나타낼 수 있다.

$$W_j = h_1 w^j - h_2 \omega_2^j + h_3 w^{j+1} - h_4 \omega_2^{j+1} = \mathbf{h}_{w_j}^T \mathbf{d}_j \quad (7a)$$

$$\theta_j = h_1 \omega_1^j - h_2 f^j + h_3 \omega_1^{j+1} - h_4 f^{j+1} = \mathbf{h}_{\theta_j}^T \mathbf{d}_j \quad (7b)$$

여기서,

$$\mathbf{d}_j = \{w^j, \omega_2^j, \omega_1^j, f^j, w^{j+1}, \omega_2^{j+1}, \omega_1^{j+1}, f^{j+1}\}^T \quad (8a)$$

$$\mathbf{h}_{w_j}^T = \{h_1, -h_2, 0, 0, h_3, -h_4, 0, 0\} \quad (8b)$$

$$\mathbf{h}_{\theta_j}^T = \{0, 0, h_1, -h_2, 0, 0, h_3, -h_4\} \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= (2x^3 - 3x^2 d_j + d_j^3)/d_j^3 \\ h_2 &= (x^3 d_j - 2x^2 d_j^2 + x d_j^3)/d_j^3 \\ h_3 &= (-2x^3 + 3x^2 d_j)/d_j^3 \\ h_4 &= (x^3 d_j - x^2 d_j^2)/d_j^3 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (7)을 식 (6a)에 대입하면

$$V_B = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K}_{BE} + F_1 \mathbf{K}_{BG1} - M_3 \mathbf{K}_{BG2}) \mathbf{d} \quad (10)$$

여기서,

$$\mathbf{K}_{BE} = \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j} \begin{bmatrix} EI_2 \mathbf{h}_{w_j}'' \mathbf{h}_{w_j}''^T + EI_\phi \mathbf{h}_{\theta_j}'' \mathbf{h}_{\theta_j}''^T \\ + GJ \mathbf{h}_{\theta_j}' \mathbf{h}_{\theta_j}'^T \\ + EI_{2\phi} (\mathbf{h}_{w_j}' \mathbf{h}_{\theta_j}'^T + \mathbf{h}_{\theta_j}' \mathbf{h}_{w_j}'^T) \end{bmatrix} dx_j \quad (11a)$$

$$\mathbf{K}_{BG1} = \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j} [(\mathbf{h}_{w_j}' \mathbf{h}_{w_j}'^T + \beta_1 \mathbf{h}_{\theta_j}' \mathbf{h}_{\theta_j}'^T)] dx_j \quad (11b)$$

$$\mathbf{K}_{BG2} = \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j} [(\mathbf{h}_{w_j}' \mathbf{h}_{\theta_j}'^T + \mathbf{h}_{\theta_j}' \mathbf{h}_{w_j}'^T - \beta_3 \mathbf{h}_{\theta_j}' \mathbf{h}_{\theta_j}'^T)] dx_j \quad (11c)$$

여기서,

$$d = \left\{ w^1, \omega_2^1, \theta^1, f^1, w^2, \omega_2^2, \theta^2, f^2, \dots, w^{n+1}, \omega_2^{n+1}, \theta^{n+1}, f^{n+1} \right\}^T$$

\mathbf{K}_{BE} , \mathbf{K}_{BG1} , \mathbf{K}_{BG2} 는 각각 j 번째 요소의 8×8 강도행렬을 조합하여 도출된 $4(N+1) \times 4(N+1)$ 의 탄성강도행렬과 기하강도행렬이다. 텐던의 비접착 조건에서 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴해석을 위한 총 포텐셜 에너지는 아래의 식 (12)와 같다.

$$V_T^U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K}_{TE}^U + H \mathbf{K}_{TG}^U) \mathbf{d} \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{K}_{TE}^U = \frac{EA_c b^2}{l_i} \begin{bmatrix} \mathbf{t1} & \dots & -\mathbf{t1} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{t1} & \dots & \mathbf{t1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{TG}^U = \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_{TG,i}^U,$$

$$\mathbf{k}_{TG,i}^U = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} \mathbf{t2} & \dots & -\mathbf{t2} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{t2} & \dots & \mathbf{t2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e & 0 & e^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (12)에서 \mathbf{K}_{TE}^U , \mathbf{K}_{TG}^U 는 각각 비접착 조건에서 텐던의 $4(N+1) \times 4(N+1)$ 탄성 및 기하강도행렬; $\mathbf{k}_{TG,i}^U$ 는 i 번째 요소의 $4(n+1) \times 4(n+1)$ 강성행렬; $\mathbf{t1}$, $\mathbf{t2}$ 는 4×4 부분행렬이다.

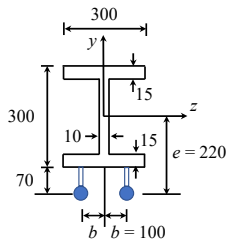
한편, 비접착 편향부의 경우 LC1, LC2, LC3 하중 조건에 대한 횡-비틀 좌굴하중은 식 (13)과 같은 고유치해석으로 산정된다.

$$\bullet \text{ LC1: } (\mathbf{K}_{BE} + \mathbf{K}_{TE}^U) \mathbf{d} = H_o (\mathbf{K}_{BG} - \mathbf{K}_{TG}^U) \mathbf{d} \quad (13a)$$

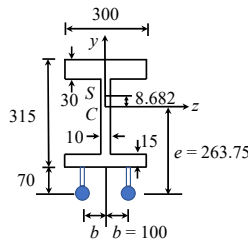
$$\bullet \text{ LC2: } [\mathbf{K}_{BE} + \mathbf{K}_{TE}^U - H_o (\mathbf{K}_{BG} - \mathbf{K}_{TG}^U)] \mathbf{d} = P [\mathbf{K}_{BG1} - C_P (\mathbf{K}_{BG} - \mathbf{K}_{TG}^U)] \mathbf{d} \quad (13b)$$

$$\bullet \text{ LC3: } [\mathbf{K}_{BE} + \mathbf{K}_{TE}^U - H_o (\mathbf{K}_{BG} - \mathbf{K}_{TG}^U)] \mathbf{d} = M [\mathbf{K}_{BG2} + C_M (\mathbf{K}_{BG} - \mathbf{K}_{TG}^U)] \mathbf{d} \quad (13c)$$

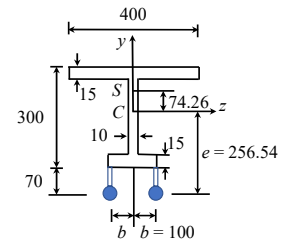
여기서, $\mathbf{K}_{BG} = \mathbf{K}_{BG1} - e \mathbf{K}_{BG2}$.



(a) Bi-symmetric section



(b) Mono-symmetric section I



(c) Mono-symmetric section II

Fig. 5. Three types of cross-section

한편, 텐던이 없는 일반적인 보의 횡-비틀 좌굴 하중은 식 (13)에서 텐던과 관련된 \mathbf{K}_{TE}^U , \mathbf{K}_{TG}^U 행렬을 제거하여 산정한다.

접착 조건에 놓여있는 다수의 편향부가 있는 PS 강재 보의 면외좌굴거동에 대한 총 포텐셜 에너지는 식 (14)와 같다.

$$V_T^B = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K}_{TE}^B + H_i \mathbf{K}_{TG}^B) \mathbf{d} \quad (14)$$

여기서,

$$\mathbf{K}_{TE}^B = \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_{TE,i}^B, \quad \mathbf{k}_{TE,i}^B = \frac{EA_c b^2}{l_{ci}} \begin{bmatrix} \mathbf{t1} & \dots & -\mathbf{t1} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{t1} & \dots & \mathbf{t1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{TG}^B = \mathbf{K}_{TG}^U$$

식 (14)에서 \mathbf{K}_{TE}^B , \mathbf{K}_{TG}^B 는 각각 접착 조건에서의 텐던의 탄성강도행렬과 기하강도행렬; $\mathbf{k}_{TE,i}^B$ 는 i 번째 요소의 $4(n+1) \times 4(n+1)$ 강성행렬이다. 접착 조건에서의 면외 좌굴해석에 대한 고유치 문제는 식 (13)에서 위첨자 ‘U’를 ‘B’로 변환하여 적용한다.

5. 수치해석 예

Fig. 5(a)는 이축 대칭인 H-형강 단면이고, Fig. 5(b)는 Fig. 5(a) 단면에서 상부플랜지와 동일한 판이 H-형강 상부에 겹쳐있는 상태로서, 상부플랜지 두께가 2배 증가되고 형강의 총 높이가 15 mm 증가된 일축 대칭 단면이며, Fig. 5(c)는 Fig. 5(a) 단면에서 상부플랜지 폭을 400 mm로 증가시키고 하부플랜지 폭을 200 mm로 감소시킨 일축 대칭 단면이다. 각각의 단면에 도심(C)과 전단중심(S)의 위치가 표기되어 있으며, 텐던의 직경($\phi = 40$ mm)과 위치는 모두 동일하다.

Table 2에서 세 가지 단면에 대한 단면상수 값을 제시하였다. 특히, I_ϕ , $I_{2\phi}$ 는 전장에서 기술한 바와 같이 도심

에서 정의된 뒹함수(warping function)를 적용한 단면상수이다.

5.1 텐던의 긴장력에 의한 횡-비틀 좌굴(LC1)

텐던의 긴장력에 의한 일축 대칭 단면을 갖는 PS 강재 보(단순지지/켄틸레버)의 횡-비틀 좌굴 유한요소해석을 수행하였다. Fig. 5(b)와 Fig. 5(c)에 도시된 일축 대칭 단면을 갖는 PS 보에 대하여 횡-비틀 좌굴을 발생시키는 긴장력을 각각 Table 3와 Table 4에 나타냈으며, 단일텐던인 경우와 이중텐던의 경우를 구분하여 횡-비틀 좌굴 거동을 분석하였다. 여기서 DEV0, DEV1, DEV2, DEV5는 부착된 편향부의 수가 각각 0, 1, 2, 5임을 의미한다.

이 논문에서 제시된 유한요소해석기법에 의한 횡-비틀 좌굴 긴장력은 기존 문헌에서 발표된 이론적인 엄밀해^[22]와 거의 동일한 결과를 제시하고 있다.

또한, 지간 중앙에 편향부(deviator)를 1개만 설치하여도 편향부가 설치되지 않은 경우에 비하여 횡-비틀 좌굴 하중이 약 3배 증가하여, 편향부 설치에 따른 횡-비틀 좌굴 억제 효과가 충분함을 확인하였다.

5.2 초기 긴장된 일축 대칭 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 축력(LC2)

Table 5와 Table 6 그리고 Fig. 6에서 텐던의 초기긴장력(H_o)의 변화에 따른 압축력(P)에 대한 횡-비틀 좌굴하

Table 2. Material and geometric properties

Type of cross-section	E (GPa)	G (GPa)	A (mm ²)	A_c (mm ²)	I_3 (mm ⁴)	I_2 (mm ⁴)	J (mm ⁴)	I_ϕ (mm ⁶)	$I_{2\phi}$ (mm ⁵)	e (mm)	e_2 (mm)	β_3 (mm)
Bi-symm. section	206	79.231	11,700	1,257	1.989×10^8	6.750×10^7	7.750×10^5	1.371×10^6	0.0	220.0	0.0	0.0
Mono-symm. section I			16,200		2.832×10^8	1.013×10^8	3.135×10^6	1.932×10^{12}	8.795×10^8	263.75	8.682	71.13
Mono-symm. section II			11,700		1.837×10^8	9.002×10^7	7.700×10^5	1.219×10^{12}	6.685×10^9	256.54	74.26	28.76

Table 3. LTB loads H_{cr} (Mono-symmetric section I)

(Unit: kN)

Specimen	Single tendon				Double tendon			
	FEM by this study		Exact sol. ^[22]		FEM by this study		Exact sol. ^[22]	
	Simple beam	Cantilever beam	Simple beam	Cantilever beam	Simple beam	Cantilever beam	Simple beam	Cantilever beam
H-DEV0	1,059.9	1,108.2	1,059.9	1,108.2	1,139.2	1,192.4	1,139.2	1,192.4
H-DEV1	2,896	3,008	2,896	3,008	2,896	3,030.2	2,896	3,030.2
H-DEV2	5,122.4	5,251	5,122.4	5,251	5,145.4	5,270.4	5,145.4	5,270.4
H-DEV5	15,502	15,615	15,501	15,615	15,502	15,639	15,501	15,638

Table 4. LTB loads H_{cr} (Mono-symmetric section II)

(Unit: kN)

Specimen	Single tendon				Double tendon			
	FEM by this study		Exact sol. ^[22]		FEM by this study		Exact sol. ^[22]	
	Simple beam	Cantilever beam	Simple beam	Cantilever beam	Simple beam	Cantilever beam	Simple beam	Cantilever beam
H-DEV0	494.36	552.75	494.36	552.75	536.33	590.5	536.33	590.5
H-DEV1	1,004.7	1,076.3	1,004.7	1,076.3	1,004.7	1,090.5	1,004.7	1,090.5
H-DEV2	1,646.9	1,712.3	1,646.9	1,712.3	1,664.4	1,725.4	1,664.4	1,725.4
H-DEV5	4,895	4,943.8	4,894.8	4,943.6	4,895	4,957.4	4,894.8	4,957.3

중 P_{cr} 을 산정하여 기존의 엄밀해^[26]와 비교하였다. 단순 지지(SB)와 켈틸레버 지지 조건(CB)에 대하여 본 논문에서 개발한 유한요소해석기법을 적용한 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴하중은 이론적인 엄밀해와 거의 일치하여 본 논문에서 제시한 유한요소해석기법의 타당성을 입증하였다. 한편, 편향부를 1개 이상 설치하면 편향부의 증가에 따른 횡-비틀 좌굴 하중 P_{cr} 의 증가 효과는 크지 않다. 텐던의 초기긴장력(H_o)이 증가할수록 P_{cr} 값은 감소하며, 이는 초기긴장력이 PS 강재 보에는 압축력으로 작용

함에 따른 결과라고 판단된다. 일축 대칭 단면 I(Mono-symmetric section I)의 횡-비틀 좌굴하중은 일축 대칭 단면 II(Mono-symmetric section II)의 횡-비틀 좌굴하중보다 약 20 % 이상 증가하였으나, 편향부의 증가에 따른 횡-비틀 좌굴하중의 증가 효과는 일축 대칭 단면 II에서 크게 나타남을 확인하였다. 즉, 일축 대칭 단면 II에서 중앙에 편향부를 1개만 설치하여도 횡-비틀 좌굴하중의 증가 효과는 편향부가 없는 경우에 비하여 약 3배 정도 향상된다.

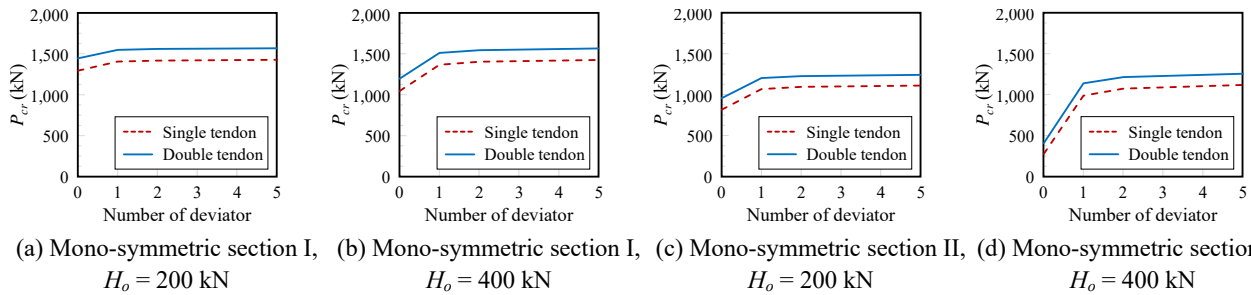


Fig. 6. LTB loads P_{cr}

Table 5. LTB loads P_{cr} (Mono-symmetric section I)

(Unit: kN)

Specimen	$H_o = 200$ kN				$H_o = 400$ kN			
	Single tendon		Double tendon		Single tendon		Double tendon	
	This study	Exact sol. ^[26]	This study	Exact sol. ^[26]	This study	Exact sol. ^[26]	This study	Exact sol. ^[26]
P-SB-DEV0	1,293.1	1,293.1	1,442.7	1,442.5	1,043.6	1,043.6	1,194.1	1,193.6
P-SB-DEV1	1,404.5	1,404.2	1,547.6	1,547.4	1,362.3	1,362.3	1,506.7	1,506.4
P-SB-DEV2	1,417.9	1,417.5	1,559.2	1,559	1,399.1	1,399.1	1,540.7	1,540.4
P-SB-DEV5	1,426.4	1,426.1	1,566.7	1,566.5	1,421.4	1,421.4	1,561.95	1,561.9
P-CB-DEV0	320.25	320.25	356.91	356.9	272.32	272.32	310.73	310.65
P-CB-DEV1	348.02	347.99	383.25	383.21	337.1	337.1	372.45	372.37
P-CB-DEV2	353.21	353.19	388.33	388.31	348.47	348.47	383.66	383.6
P-CB-DEV5	356.33	356.31	391.41	391.39	355.15	355.15	390.25	390.23

Table 6. LTB loads P_{cr} (Mono-symmetric section II)

(Unit: kN)

Specimen	Single tendon		Double tendon	
	$H_o = 200$ kN	$H_o = 400$ kN	$H_o = 200$ kN	$H_o = 400$ kN
P-SB-DEV0	812.34	275.38	953.99	407.61
P-SB-DEV1	1,063.7	986.77	1,200.7	1,136.5
P-SB-DEV2	1,091.6	1,072.6	1,224.2	1,211.5
P-SB-DEV5	1,107.9	1,116.2	1,239.3	1,253.3
P-CB-DEV0	256.77	153.92	295.28	199.62
P-CB-DEV1	297.39	283.03	332.42	318.47
P-CB-DEV2	304.07	298.98	338.88	334.05
P-CB-DEV5	307.86	307.35	342.64	342.36

5.3 초기 긴장된 일축 대칭 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 모멘트(LC3)

Table 7과 Table 8 그리고 Fig. 7에서 텐던의 초기긴장력(H_o)의 변화에 따른 횡-비틀 좌굴 휨모멘트(M_{cr})를 산정하여 문헌의 엄밀해^[26]의 결과와 함께 비교하였다. 전장에서 분석한 LC2의 경우와 상이하계, 초기장력의 변화에 따른 횡-비틀 좌굴 모멘트의 변화는 4 % 이내로 미미함을 확인하였다. 또한, 지간 내부에 설치되는 편향부

의 수가 증가함에 따라 횡-비틀 좌굴안정성은 약 9 % 정도로 향상되지만, 그 효과는 전장에서 분석한 LC2의 경우에 대한 최대 27 %에 비하여 크지 않다. 또한, 편향부의 개수의 증가에 따른 횡-비틀 좌굴모멘트의 증가 효과는, 일축 대칭 단면 I(Mono-symmetric section I)과 일축 대칭 단면 II(Mono-symmetric section II)에서 각각 13 %, 3 %로서 상부플랜지의 두께를 증가시킨 일축 대칭 단면 I(Mono-symmetric section I)에서 횡-비틀 좌굴 강도의 증진 효과가 크게 발생한다. 또한, 텐던을 플랜지 하부의

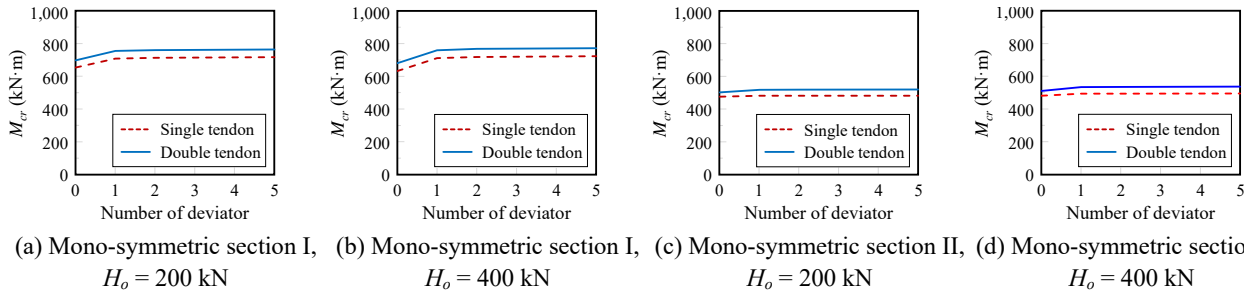


Fig. 7. LTB moments M_{cr}

Table 7. LTB loads M_{cr} (Mono-symmetric section I)

(Unit: kN·m)

Specimen	$H_o = 200$ kN				$H_o = 400$ kN			
	Single tendon		Double tendon		Single tendon		Double tendon	
	This study	Exact sol. ^[26]	This study	Exact sol. ^[26]	This study	Exact sol. ^[26]	This study	Exact sol. ^[26]
P-SB-DEV0	654.14	654.14	697.85	697.82	631.83	631.83	679.71	679.62
P-SB-DEV1	708.09	708.09	754.77	754.74	710.66	710.66	759.92	759.85
P-SB-DEV2	713.86	713.86	760.79	760.75	718.5	718.5	767.93	767.85
P-SB-DEV5	717.26	717.26	764.19	764.16	722.98	722.98	772.32	772.31
P-CB-DEV0	300.09	300.09	320.63	320.61	287.21	287.21	310.47	310.44
P-CB-DEV1	319.65	319.65	339.08	339.06	319.76	319.75	340.62	340.59
P-CB-DEV2	323.11	323.07	342.47	342.44	324.99	324.96	345.72	345.69
P-CB-DEV5	328.09	328.07	344.45	344.43	327.94	327.92	348.65	348.62

Table 8. LTB loads M_{cr} (Mono-symmetric section II)

(Unit: kN·m)

Specimen	Single tendon		Double tendon	
	$H_o = 200$ kN	$H_o = 400$ kN	$H_o = 200$ kN	$H_o = 400$ kN
P-SB-DEV0	475.69	480.05	501.78	509.88
P-SB-DEV1	481.03	492.91	516.9	532.55
P-SB-DEV2	481.52	493.35	518.64	534.92
P-SB-DEV5	481.78	494.46	519.84	536.56
P-CB-DEV0	181.86	183.84	195.61	199.69
P-CB-DEV1	186.58	192.58	200.73	208.94
P-CB-DEV2	187.37	193.91	201.34	210.14
P-CB-DEV5	187.92	194.9	201.95	211.22

좌·우에 이중으로 배치한 경우, 단면 중앙에 단일 배치하는 경우에 비하여 횡-비틀 좌굴 강도가 약 10 % 이상 향상되는 것으로 분석되었다.

6. 결론

이 논문에서는 텐던의 초기 긴장력이 재하된 일축 대칭 단면을 갖는 PS 강재 보에 대한 횡-비틀 좌굴에 대한 유한요소해석을 수행하였다. 긴장재의 장력효과가 반영된 PS 강재 보의 총 포텐셜 에너지를 적용하여, 횡-비틀 좌굴거동에 대한 일반화된 유한요소해석기법을 제시하였다. 편향부의 개수, 텐던의 초기긴장력의 변화 및 지지 조건에 따른 횡-비틀 좌굴 거동을 분석한 결과 아래와 같은 결론을 도출하였다.

- (1) 외부에서 긴장된 텐던의 장력 효과를 고려한 일축 대칭 단면을 갖는 PS 강재 보 요소를 개발하여 산정된 횡-비틀 좌굴하중은 문헌에서 제시된 이론적인 엄밀해와 매우 잘 일치하고 있어서, 본 논문에서 정립한 유한요소해석기법의 타당성을 입증하였다.
- (2) 지간 내부에 설치된 편향부(deviator)는 긴장재의 장력에 의한 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴 강도를 크게 향상시키는 효과가 있다. 지간 중앙에 편향부를 1개만 설치하여도 편향부가 설치되지 않은 경우에 비하여 횡-비틀 좌굴 하중이 약 3배 증가하여, 편향부 설치에 따른 횡-비틀 좌굴 억제 효과가 충분함을 확인하였다.
- (3) 텐던의 초기장력이 재하된 PS 강재 보에서 외력으로 작용하는 압축력에 대한 횡-비틀 좌굴 거동에서, 편향부를 1개 이상 설치하면 편향부의 증가에 따른 횡-비틀 좌굴 하중 P_{cr} 의 증가 효과는 크지 않고, 텐던의 초기긴장력(H_0)이 증가할수록 P_{cr} 값은 감소하며, 이는 초기 긴장력이 PS 강재 보에는 압축력으로 작용함에 따른 결과라고 판단된다.
- (4) 일축 대칭 PS 보에 대한 횡-비틀 좌굴모멘트는 지간 내부에 설치되는 편향부의 수가 증가함에 따라 횡-비틀 좌굴안정성은 약 9 % 정도로 향상되지만, 그 효과는 압축력에 대한 횡-비틀 좌굴의 경우에 대한 최대 27 %에 비해 크지 않음을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 한국연구재단의 연구비(NRF-2021R1A2C1 009716) 지원으로 작성되었습니다.

참고문헌(References)

- [1] Vlasov, V.Z. (1961) *Thin-Walled Elastic Beams*, National Science Foundation, USA.
- [2] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M. (1961) *Theory of Elastic Stability* (2nd Ed.), McGraw-Hill, USA.
- [3] Trahair, N.S. (1993) *Flexural-Torsional Buckling of Structures*, CRC Press, USA.
- [4] Kim, S.-B., and Kim, M.-Y. (2000) Improved Formulation for Spatial Stability and Free Vibration of Thin-Walled Tapered Beams and Space Frames, *Engineering Structures*, Elsevier, Vol.22, No.5, pp. 446-458.
- [5] Erkmen, R.E., and Attard, M.M. (2011) Lateral-Torsional Buckling Analysis of Thin-Walled Beams Including Shear and Pre-Buckling Deformation Effects, *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, Vol.53, No.10, pp.918-925.
- [6] Sahraei, A., Wu, L., and Mohareb, M. (2015) Finite Element Formulation for Lateral Torsional Buckling Analysis of Shear Deformable Mono-Symmetric Thin-Walled Members, *Thin-Walled Structures*, Elsevier, Vol.89, pp.212-226.
- [7] Belenya, E.I. (1977) *Prestressed Load-Bearing Metal Structures*, Mir Publishers, USSR.
- [8] Wadee, M.A., Hadjipantelis, N., Bazzano, J.B., Gardner, L., and Lozano-Galant, J.A. (2020) Stability of Steel Struts with Externally Anchored Prestressed Cables, *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, Vol.164, 105790.
- [9] de Araujo, R.R., de Andrade, S.A.L., Vellasco, P.C.G.da.S., da Silva, J.G.S., and de Lima, L.R.O. (2008) Experimental and Numerical Assessment of Stayed Steel Columns, *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, Vol.64, No.9, pp.1020-1029.
- [10] Wu, K., Wadee, M.A., and Gardner, L. (2020) Interactive Buckling in Prestressed Stayed Beam-Columns, *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, Vol.174, 105479.

- [11] Wu, K., Wade, M.A., and Gardner, L. (2021) Pre-Stressed Stayed Beam-Columns: Sensitivity to Prestressing Levels, Pre-Cambering and Imperfections, *Engineering Structures*, Elsevier, Vol.226, 111344.
- [12] Park, S., Kim, T., Kim, K., and Hong, S.-N. (2010) Flexural Behavior of Steel I-Beam Prestressed with Externally Unbonded Tendons, *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, Vol.66, No.1, pp. 125-132.
- [13] Belletti, B., and Gasperi, A. (2010) Behavior of Prestressed Steel Beams, *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, Vol. 136, No.9, pp.1131-1139.
- [14] Ghafoori, E., and Motavalli, M. (2015) Lateral-Torsional Buckling of Steel I-Beams Retrofitted by Bonded and Un-Bonded CFRP Laminates with Different Pre-Stress Levels: Experimental and Numerical Study, *Construction and Building Materials*, Elsevier, Vol.76, pp.194-206.
- [15] Kambal, M.E.M., and Jia, Y. (2018) Theoretical and Experimental Study on Flexural Behavior of Prestressed Steel Plate Girders, *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, Vol.142, pp.5-16.
- [16] Ren, Y., Wang, Y., Wang, B., Ban, H., Song, J., and Su, G. (2018) Flexural Behavior of Steel Deep Beams Prestressed with Externally Unbonded Straight Multi-Tendons, *Thin-Walled Structures*, Elsevier, Vol. 131, pp.519-530.
- [17] Khosla, C.M. (1975) *Buckling Loads of Stayed Columns Using the Finite Element Method*, Master's Thesis, University of Windsor, Canada.
- [18] Hathout, I.A.-S. (1977) *Stability Analysis of Space Stayed Columns by the Finite Element Method*, Master's Thesis, University of Windsor, Canada.
- [19] Yang, D.S., Lim, S.H., and Park, S.K. (2002) Flexural Behavior of External Prestressed H-Beam, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.14, No.1, pp.79-85 (in Korean).
- [20] Jung, M.J., and Yoon, S.K. (2017) Structural Performance on the Self-Centering Connections with Different Conditions of PT Strands, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.29, No.1, pp.73-80 (in Korean).
- [21] Kim, M.Y., Mehdi, A.I., and Kim, S.B. (2022) FE Analysis on In-Plane and Out-of-Plane Buckling of Steel Beams with Externally Prestressed Rectilinear Tendons, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.34, No.2, pp.77-88 (in Korean).
- [22] Kim, M.-Y., Hayat, U., Kim, S.-B., and Mehdi, A.I. (2022) Stabilizing Effects of Discrete Deviators on LTB of Mono-Symmetric Thin-Walled Beams Prestressed by Rectilinear Tendon Cables, *Thin-Walled Structures*, Elsevier, Vol.176, 109329.
- [23] Zhang, W.-F. (2018) Symmetric and Antisymmetric Lateral-Torsional Buckling of Prestressed Steel I-Beams, *Thin-Walled Structures*, Elsevier, Vol.46, pp.463-479.
- [24] Kim, M.-Y., Kim, N.-K., and Hayat, U. (2021) Flexural Buckling and Second-Order Analysis of Prestressed Steel Beams with Un-Bonded/Bonded Deviators, *Thin-Walled Structures*, Elsevier, Vol.164, 107806.
- [25] Kim, M.-Y., Hayat, U., and Mehdi, A.I. (2021) Lateral-Torsional Buckling of Steel Beams Prestressed by Straight Tendons with a Single Deviator, *Thin-Walled Structures*, Elsevier, Vol.163, 107642.
- [26] Kim, M.-Y., Mehdi, A.I., and Hayat, U. (2022) Spatial Stability of Pre-Stressed Mono-Symmetric Steel Beams with Un-Bonded/Bonded Deviators Under Compression and End Moments, *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, Vol.189, 107078.

요약: 외부에서 긴장력이 도입되고 일축 대칭 단면을 갖는 PS 강재 보의 횡-비틀 좌굴에 대한 유한요소해석을 수행하였다. 외부 긴장재에 작용하는 장력 효과를 포함한 단순지지/캔틸레버 PS 강재 보의 총 포텐셜 에너지를 적용하여, 횡-비틀 좌굴 거동에 대한 일반화된 유한요소해석기법을 제시하였다. 두 가지 유형의 일축 대칭 단면을 갖는 PS 강재 보에 대하여 편향부의 개수, 텐던의 초기긴장력의 변화, 지지조건 및 가력 조건에 따른 횡-비틀 좌굴 하중을 산정하였다. 단순지지된 보와 캔틸레버보에 대한 횡-비틀 좌굴해석결과를 편향부의 수에 따라 제시하였고, 기존의 문헌에서 발표된 엄밀해와 비교/분석하였다.

핵심용어: 유한요소해석, 횡-비틀 좌굴, 일축 대칭, 강재 보, 프리스트레스