

최대고유진동수를 갖는 변단면 중공 보-기둥의 최적단면

김권식¹ · 이종천² · 이태은^{3*}

¹교수, 원광대학교 토목환경공학과, ²교수, 동강대학교 토목조경과, ³겸임교수, 동강대학교 토목조경과

Optimal Shape of Hollowed Beam-Columns with Variable Cross-Section Having Maximum Natural Frequency

Kim, Gwon Sik¹, Lee, Jong Cheon², Lee, Tae Eun^{3*}

¹Professor, Dept. of Civil and Environmental Engineering, Wonkwang University, Iksan, 54538, Korea

²Professor, Dept. of Civil and Landscape Engineering, Donggang University, Gwangju, 61200, Korea

³Adjunct Professor, Dept. of Civil and Landscape Engineering, Donggang University, Gwangju, 61200, Korea

Abstract - This paper deals with optimal shape of hollowed beam-columns with variable cross-section having maximum natural frequency. The cross sections of beam-column taper are the hollowed regular polygons whose depths are varied with the linear, parabolic, and sinusoidal functional fashion. Volumes of the objective beam-columns are always held constant regardless given geometrical conditions. Ordinary differential equation governing free vibrations of such beam-columns are derived and solved numerically for determining the natural frequencies and the strongest shapes. In the numerical examples, hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are considered. As the numerical results, the relationships between frequency parameters and various beam-column parameters such as section ratio, thickness ratio and axial load are reported in tables and figures. The values of the frequency parameter increases with increasing section ratio until reaching the summit point and then decreases with increasing section ratio after the summit point. This value of section ratio is the optimal section ratio for the given beam-column parameters by the definition of dynamic optimal shape in this study.

Keywords - Optimal shape, Stability region, Free vibration, Hollowed beam-column, Variable cross-section, Constant volume

1. 서론

최근 설계 및 시공 기술의 발달과 강재의 고강도화로 인해 다양한 형태의 복잡하고 거대한 구조물의 건설이 활발히 진행되고 있다. 장대화, 세장화된 거대 구조물에서는 구조체의 자중을 줄이면서 저항능력을 증가시키는 것이 무엇보다 중요하다. 중공단면은 한정된 재료에서 자중의 감소, 좌굴하중 증가, 세장비 감소 등의 효과를 가져올 수 있어 구조물의 대형화와 함께 그 사용이 날로 증가하고 있다.

비교적 세장한 단위구조에 풍압이 가해지면 와류에 의하여 진동이 발생할 수 있으며, 이러한 진동이 구조물의 고유진동수와 유사해지면 다소 큰 진폭의 진동이 발생하게 된다. 이러한 진동은 반복적으로 큰 응력을 발생시켜 피로파괴의 원인이 되거나 좌굴에 대한 안전도가 저하하여 종종 구조물의 안정성에 문제를 일으키기도 한다. 교량구간을 통행하는 차량에 의해 발생하는 동하중도 이와 유사한 문제점을 야기할 수 있다. 따라서 교량 등과 같이 동하중을 받는 구조물에서 단위구조체의 동적거동특성을 규명하는 것은 매우 중요하며, 특히 진동에 민감한 강구조물의 해석과 설계에서는 무엇보다도 먼저 선행되어야 할 연구과제이다^[1].

구조물의 설계에서 변단면의 사용은 전체 구조물의 자중을 줄이면서 작용하중에 대한 내하능력을 증진시킬 수 있으며, 외관의 아름다움, 경제성, 시공성 등 특정한 목적 때문에 그 이용이 날로 증가하는 추세이다. 구조물의 형태를 변단면으로 시공하는 경우 한정된 재료와 공간에서 최대의 정·

Note.-Discussion open until August 31, 2020. This manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on November 20, 2019; revised December 16, 2019; approved on December 16, 2019.

Copyright © 2020 by Korean Society of Steel Construction

*Corresponding author.

Tel. +82-63-850-6720 Fax. +82-50-4266-7544

E-mail. telee@wku.ac.kr

동적능력을 갖는 단면형상을 산정하는 것이 매우 중요하다. 본 연구에서 대상으로 하는 부재는 선형변화에 상관없이 동일한 부재길이와 동일한 체적을 갖는 일정체적 변단면 부재이다. 일정체적 부재는 단면형상과 변단면의 형태에 따라서 동적특성이 달라지므로 동일한 체적에서 보다 큰 동적안정성을 확보할 수 있는 적절한 변단면의 형태를 결정할 수 있다. 이는 구조의 기하적 형태만으로 고유진동수를 증진시킬 수 있는 매우 합리적인 방법이며, 동일한 강성에서는 최소의 자중을 가질 수 있으므로 최적설계의 개념에서도 중요한 연구과제이다²⁾.

단위구조의 동적 해석에 관한 연구는 많은 연구자들의 해 활발히 진행되어 왔다^{3)~6)}. 그러나 등단면 또는 비교적 이론전개가 용이한 선형 변단면을 대상으로 이루어지고 있으며, 이 경우에도 중실단면을 대상으로 하는 연구가 대부분이다. 일정한 체적에서 보다 큰 안정성을 확보하거나 동일 강성에서 최소의 자중을 가질 수 있는 단면 형상에 관한 연구는 드문 실정이며, 특히 최대의 고유진동수를 갖는 단면에 관한 연구에 중공단면을 적용한 연구는 거의 찾아볼 수가 없다. 따라서 본 연구는 매우 독창적이면서 해당 분야의 학문적 확장을 꾀할 수 있는 연구과제로, 그 결과들은 구조물의 동적해석 또는 최적설계 분야에서 활용이 예상되며, 이와 관련된 교육으로의 환류 또한 기대된다.

이 연구에서 해석대상 보-기둥은 시간길이와 체적이 일정하고, 정다각형의 중공단면을 갖는다. 변단면 형상은 직선, 포물선, 정현 함수로 표현되는 선형을 채택하였고, 단부는 회전지점과 고정지점으로 조합되는 지점조건을 고려하였다. 이러한 일정체적 변단면 중공 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 대상 부재의 고유진동수를 산정하였다. 하중과 단면비, 두께비 등의 관계를 고찰하고, 이로부터 최대의 고유진동수를 갖는 최적단면과 좌굴에 대한 안정영역을 결정하였다.

2. 수학적 모형

2.1 중공단면을 갖는 일정체적 보-기둥의 정의

보는 일반적으로 수직하중만이 작용하는 구조로 해석하나, 복잡하고 거대한 구조물의 구성요소로 이용되는 경우에는 수직하중과 축하중이 함께 작용하는 경우가 빈번하다. 이 연구에서는 실구조에의 적용성을 강화하기 위하여 축하중의 작용을 고려하였다. 이 경우 축하중의 크기를 ‘0’

으로 하면 순수하게 수직하중만을 받는 보가 되며, 축하중을 고려하면 보와 기둥의 혼합형태인 보-기둥으로 모형화할 수 있다.

Fig. 1(a)는 이 연구에서 대상으로 하는 정다각형 중공단면을 갖고, 시간길이가 l , 체적이 V 이며, 양단이 회전 및 고정지점으로 지지되어 있는 보-기둥을 나타낸다. 정다각형 단면의 도심에서 꼭지점까지의 거리가 단면깊이 h 이며, 꼭지점에서의 두께가 t 이다. 본 연구대상 부재는 단면깊이 h 가 단면의 축방향 좌표 x 에 따라서 변화하는 변단면 보-기둥이며, 따라서 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 도 축방향 좌표 x 에 따라서 변화하게 된다. Fig. 1(b)는 h 가 축방향 좌표 x 의 함수로 표현되는 형상함수를 나타낸다. 이 그림에서 h_e 는 양단($x=0$ 및 $x=l$)에서 단면깊이이고, h_m 은 중앙($x=l/2$)에서 단면깊이이다. 축방향 좌표 x 에서 $h = h_e f(x/l)$ 의 함수로 표현되며, $f(x/l)$ 는 h 의 변화를 나타내는 형상함수이다. 부재의 체적은 h_e, h_m 의 크기와 h 의 형상함수에 상관없이 모두 일정한 체적 V 를 갖는다.

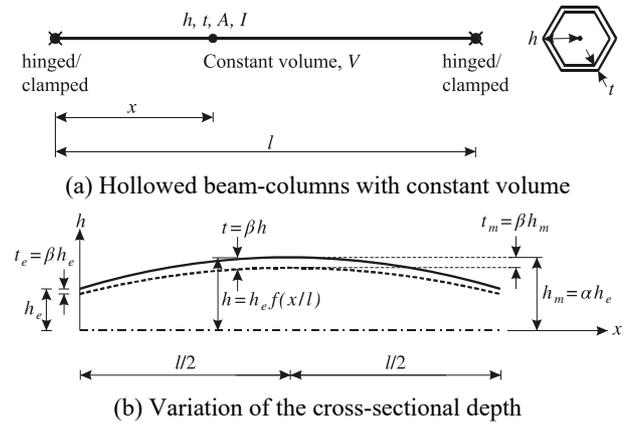


Fig. 1. Geometry of beam-columns

단면깊이 h 의 형상함수 f 를 결정하기 위하여 단면비와 두께비를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha = \frac{h_m}{h_e} \tag{1}$$

$$\beta = \frac{t_e}{h_e} = \frac{t}{h} = \frac{t_m}{h_m} \tag{2}$$

위의 식들에서 α 는 단부의 단면깊이인 h_e 에 대한 중앙에서의 단면깊이 h_m 의 비율을 나타내며, β 는 단면깊이 h 에 대한 두께 t 의 비율로 전 구간에 걸쳐 동일한 값을 갖는다.

단면깊이가 h 인 정다각형 증공단면의 단면적 A 및 단면 2차모멘트 I 는 다음과 같이 산정된다.

$$A = c_1 [h^2 - (h - t)^2] = c_1 (1 - c_3^2) h^2 \quad (3)$$

$$I = c_2 [h^4 - (h - t)^4] = c_2 (1 - c_3^4) h^4 \quad (4)$$

위의 식들에 포함된 계수 c_1, c_2, c_3 는 다음과 같다.

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[1 + \frac{\tan^2(\pi/n)}{3}\right] \quad (6)$$

$$c_3 = 1 - \beta \quad (7)$$

위의 식들에서 계수 c_1, c_2 에 포함된 n 은 정다각형 변의 수 ($n \geq 3$)이며, n 이 ∞ 이면 원형단면으로 c_1 과 c_2 는 각각 π 와 $\pi/4$ 로 수렴한다.

단면깊이 h 를 부재의 축방향 좌표 x 에 관한 형상함수 f 로 나타내면 다음과 같다.

$$h = h_e f \quad (8)$$

여기서, $f = f(x/l)$ 의 형상함수이다.

본 연구에서는 대상부재의 단면깊이 h 가 직선, 포물선 및 정현 함수로 변화하는 변단면을 채택하였으며, 각각의 선형에 대한 형상함수 f 를 산정하면 다음과 같다.

- 직선 변단면

$$f = 2c_4 \left(\frac{x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (9)$$

$$f = 2c_4 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + 1, \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (10)$$

- 포물선 변단면

$$f = 4c_4 \left(\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

- 정현 변단면

$$f = c_4 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq l \quad (12)$$

위의 식들에서 $c_4 = \alpha - 1$ 이다.

주어진 단면비 α , 두께비 β 및 단면깊이 h 로 정의되는 일정체적 증공 보-기둥의 체적 V 는 다음 식과 같이 산출할 수 있고, 이 체적 V 는 주어진 선형 및 정다각형의 변수 n 에 관계없이 모든 증공 보-기둥에 대하여 일정하다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_5 h_e^2 l \quad (13)$$

위의 식에서 c_5 는 단면깊이가 h_e 로 일정한 등단면 증실 보-기둥의 체적 V 에 대한 직선, 포물선 및 정현 변단면 증공 보-기둥의 체적비율로 그 값은 각각 다음 식들과 같다.

- 직선 변단면

$$c_5 = (1 - c_3^2) \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{3} \quad (14)$$

- 포물선 변단면

$$c_5 = (1 - c_3^2) \frac{8\alpha^2 + 4\alpha + 3}{15} \quad (15)$$

- 정현 변단면

$$c_5 = (1 - c_3^2) \left[\frac{\alpha^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) \alpha - \frac{4}{\pi} + 1.5 \right] \quad (16)$$

식 (13)을 이용하여 양단부에서 정다각형의 단면깊이 h_e 를 일정체적 V 로 나타내면 다음과 같다.

$$h_e = \left(\frac{V}{c_1 c_5 l} \right)^{1/2} \quad (17)$$

식 (17)을 이용하여 식 (3), 식 (4)의 A, I 를 일정체적 V 및 형상함수 f 로 나타내면 다음과 같다.

$$A = c_1 (1 - c_3^2) \left(\frac{V}{c_1 c_5 l} \right) f^2 \quad (18)$$

$$I = c_2 (1 - c_3^4) \left(\frac{V}{c_1 c_5 l} \right)^2 f^4 \quad (19)$$

2.2 보-기둥의 동적 미분방정식 유도

Fig. 2는 일정체적 증공 보-기둥에 축하중 P 가 작용하는 경우 대상부재의 진동형을 나타내고 있다. 본 연구에서 축하중 P 는 압축하중을 (+)로 규정하였으며, 양 단부는 회전 및 고정지점으로 지지되어 있다.

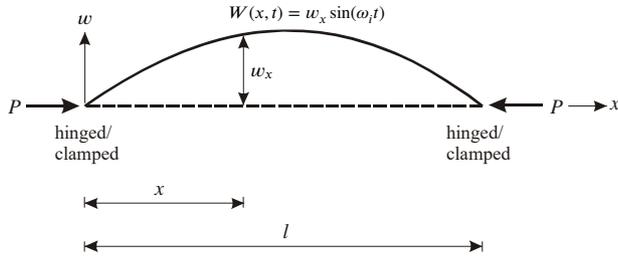


Fig. 2. Mode shape and parameters of the beam-column

이 그림에서 (x, w) 는 보-기둥의 진동형을 나타내는 직교 좌표계이다. Fig. 2에 보인 바와 같이 점선으로 표시된 부재 축이 자유진동하게 되면 시간에 따라 변화하는 횡방향 변위가 발생하여 실선으로 표시된 진동형상을 갖게 된다. 이 때 $W(x, t)$ 는 변형이 발생하기 전 보-기둥의 축을 기준으로 측정된 진동변위로서 이를 조화진동식으로 표현하면 다음 식과 같다⁷⁾.

$$W(x, t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (20)$$

이 식에서 w_x 는 조화진동의 상대진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 rad/s의 단위를 갖는 고유각진동수(angular frequency), $i(= 1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드번호, t 는 시간이다. 상대진폭을 부재 축방향을 따라 표시하면 Fig. 2의 실선과 같은 전형적인 보-기둥의 진동형이 그려진다.

Fig. 2에 보인 부재가 면내에서 진동하게 되면 Fig. 3에 나타난 바와 같이 부재 미소요소에는 진동변위에 의한 전단력 Q , 휨모멘트 M 및 축하중에 의한 축방향력 P 가 발생하게 된다. 또한 보-기둥이 진동하게 되면 $W(x, t)$ 는 시간 t 에 따라서 상하의 직선운동을 하게 된다. 따라서 질량을 갖고 있는 보-기둥의 미소요소에는 직선운동 $W(x, t)$ 에 의하여 단위길이당 힘으로 정의되는 관성력 Fdx 가 발생한다. 부재 미

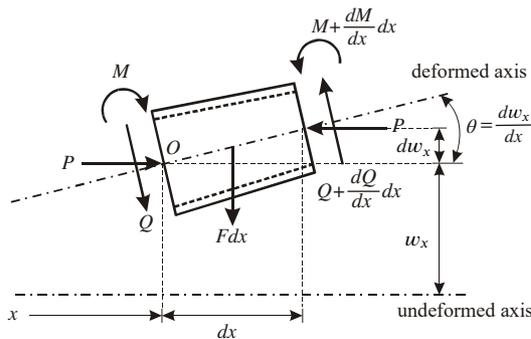


Fig. 3. Loads subjected to beam element

소요소에 작용하는 이 힘들의 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dQ}{dx} - F = 0 \quad (21)$$

$$Q + \frac{dM}{dx} + P \frac{dw_x}{dx} = 0 \quad (22)$$

일정체적 증공 보-기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 상미분방정식으로 유도하기 위하여 앞에서 나타난 휨모멘트 M , 관성력 F 를 변위항으로 나타내어야 한다.

휨-곡률 사이의 관계로부터 휨모멘트 및 그 미분값 dM/dx 를 다음과 같이 구할 수 있다⁸⁾.

$$M = EI \frac{d^2 w_x}{dx^2} \quad (23)$$

$$\frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3 w_x}{dx^3} + E \frac{dI}{dx} \frac{d^2 w_x}{dx^2} \quad (24)$$

식 (24)를 식 (22)에 대입하고 전단력 Q 에 대하여 정리하면 식 (25)와 같고, 이로부터 dQ/dx 를 구하면 식 (26)과 같다.

$$Q = -EI \frac{d^3 w_x}{dx^3} - E \frac{dI}{dx} \frac{d^2 w_x}{dx^2} - P \frac{dw_x}{dx} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} = & -EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} - 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w_x}{dx^3} \\ & - \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w_x}{dx^2} \end{aligned} \quad (26)$$

관성력 F 를 변위항으로 나타내면 다음 식과 같다⁹⁾.

$$F = -\rho \omega_i^2 A w_x \quad (27)$$

위의 식에서 ρ 는 부재재료의 질량밀도이다.

식 (26) 및 식 (27)을 식 (21)의 동적평형방정식에 대입하고 정리하면, 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 w_x}{dx^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w_x}{dx^3} + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w_x}{dx^2} \\ - \rho \omega_i^2 A w_x = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

식 (4)의 단면2차모멘트식에 식 (9) - 식 (12)의 형상함수를 적용하여 식 (28)의 미분방정식에 포함된 dI/dx 와 d^2I/dx^2 를 선형별로 구하면 각각 다음의 식들과 같다.

- 직선 변단면

$$\frac{dI}{dx} = 8c_2(1 - c_3^4)c_4 \frac{h_e^4}{l} f^3, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (29)$$

$$\frac{dI}{dx} = -8c_2(1 - c_3^4)c_4 \frac{h_e^4}{l} f^3, \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (30)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = 48c_2(1 - c_3^4)c_4^2 \frac{h_e^4}{l^2} f^2, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (31)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = 48c_2(1 - c_3^4)c_4^2 \frac{h_e^4}{l^2} f^2, \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (32)$$

- 포물선 변단면 ($0 \leq x \leq l$)

$$\frac{dI}{dx} = 16c_2(1 - c_3^4)c_4 \frac{h_e^4}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) f^3 \quad (33)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = 32c_2(1 - c_3^4)c_4 \frac{h_e^4}{l^2} f^2 \left[6c_4 \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 - f\right] \quad (34)$$

- 정현 변단면 ($0 \leq x \leq l$)

$$\frac{dI}{dx} = 4\pi c_2(1 - c_3^4)c_4 \frac{h_e^4}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) f^3 \quad (35)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = 4\pi^2 c_2(1 - c_3^4)c_4 \frac{h_e^4}{l^2} f^2 \times \left[3c_4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) f\right] \quad (36)$$

공학문제에서 해석결과를 무차원양으로 표현하면 실차원 구조에 다양하게 적용할 수 있으므로 해석결과 무차원화는 매우 중요하게 다루어지고 있다. 본 연구에서는 중공 단면을 갖는 일정체적 보-기둥의 상미분방정식을 무차원양으로 유도하여 수치해석 과정 및 결과의 효율성을 높이고자 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$p = \frac{Pl^4}{\pi EV^2} \quad (37)$$

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (38)$$

$$\eta = \frac{w_x}{l} \quad (39)$$

$$C_i = \sqrt{\frac{\rho\omega_i^2 l^5}{EV}} \quad (40)$$

식 (37)에서 p 는 축하중 P 를 일정체적 V 로 무차원화한 것으로 변단면의 종류, 정다각형의 변수, 단면비 및 두께비에 상관없이 무차원 하중 p 를 서로 비교할 수 있다. 식 (38), 식 (39)의 (ξ, η) 는 보-기둥의 진동형을 나타내는 직교좌표계 (x, w_x) 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다. 식 (40)은 무차원 고유진동수이며, 이 식에서 i 는 모드번호이다.

이상의 무차원 변수들을 이용하면 앞에서 유도한 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원화할 수 있다. 식 (18), 식 (19) 및 식 (29) - 식 (36)을 변단면 선형별로 대입하고, 무차원 변수인 식 (37) - 식 (40)을 이용하면 식 (28)의 미분방정식을 다음과 같이 무차원화할 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3p) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_4 C^2 \eta \quad (41)$$

식 (41)의 무차원 상미분방정식에 포함되어 있는 계수 a_1, a_2, a_3 및 a_4 는 변단면 선형별로 다음의 식들과 같다.

- 직선 변단면

$$a_1 = -\frac{16c_4}{f}, 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (42)$$

$$a_1 = \frac{16c_4}{f}, 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (43)$$

$$a_2 = -\frac{48c_4^2}{f^2}, 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (44)$$

$$a_2 = -\frac{48c_4^2}{f^2}, 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (45)$$

$$a_3 = -\frac{c_1^2 c_5^2}{c_2(1 - c_3^4) f^4}, 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (46)$$

$$a_3 = -\frac{c_1^2 c_5^2}{c_2(1 - c_3^4) f^4}, 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (47)$$

$$a_4 = \frac{c_1^2(1 - c_3^2)c_5}{c_2(1 - c_3^4) f^2}, 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (48)$$

$$a_4 = \frac{c_1^2(1 - c_3^2)c_5}{c_2(1 - c_3^4) f^2}, 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (49)$$

- 포물선 변단면 ($0 \leq \xi \leq 1$)

$$a_1 = -\frac{32c_4(1 - 2\xi)}{f} \quad (50)$$

$$a_2 = -\frac{32c_4[6c_4(1-2\xi)^2 - f]}{f^2} \quad (51)$$

$$a_3 = -\frac{c_1^2 c_5^2}{c_2(1-c_3^4)f^4} \quad (52)$$

$$a_4 = \frac{c_1^2(1-c_3^2)c_5}{c_2(1-c_3^4)f^2} \quad (53)$$

• 정현 변단면 ($0 \leq \xi \leq 1$)

$$a_1 = -\frac{8\pi c_4 \cos(\pi\xi)}{f} \quad (54)$$

$$a_2 = -\frac{12\pi^2 c_4^2 \cos^2(\pi\xi) - 4\pi^2 c_4 \sin(\pi\xi)f}{f^2} \quad (55)$$

$$a_3 = -\frac{c_1^2 c_5^2}{c_2(1-c_3^4)f^4} \quad (56)$$

$$a_4 = \frac{c_1^2(1-c_3^2)c_5}{c_2(1-c_3^4)f^2} \quad (57)$$

2.3 경계조건

유도된 미분방정식 식 (41)에 단부조건별 경계조건을 적용하여 수치해석 함으로써 다양한 단부조건에 대한 해석결과를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 보-기둥의 단부조건으로 회전 및 고정지점을 채택하였으며, 이들 조건에 대한 경계조건식들을 무차원량으로 나타내면 다음과 같다^[10].

회전지점의 경우 진동변위와 식 (23)의 휨모멘트가 “0”이므로 다음의 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{및} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (58)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{및} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (59)$$

고정지점의 경우에는 진동변위와 단부에서의 회전각이 “0”이므로 다음의 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{및} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (60)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{및} \quad \xi = 1 \quad \text{에서} \quad (61)$$

이상에서 유도된 식 (41)이 증공단면을 갖는 일정체적 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이며,

식 (58) - 식 (61)의 무차원 경계조건을 적용하면 수치해석 기법에 의해 무차원 고유진동수를 산출할 수 있다.

3. 수치해석 결과

3.1 수치해석방법 및 검증

본 연구에서 유도한 변단면 증공 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식의 정확해는 구할 수 없으므로 수치해석 기법을 이용하여 수치해를 산출한다. 이를 위해서 지배미분방정식의 수치적분과 지배미분방정식에 포함된 고유치인 무차원 고유진동수를 산정할 수 있는 수치해석기법이 적용되어야 한다. 본 연구에서는 미분방정식을 수치적분하기 위하여 진동문제에 많이 이용되고 있는 4차 Runge-Kutta법^[11]을 이용하였다. 또한 지배미분방정식에 포함된 고유진동수를 산정하기 위한 시행착오적 행렬값 탐색법에서 가정한 고유진동수를 참 값의 고유진동수에 근접시키는 수치해석 기법을 적용하였다.

Table 1은 본 연구의 이론적 전개과정 및 수치해석과정의 타당성을 검증하기 위하여 문헌^[12]의 결과와 본 연구의 수

Table 1. Comparison of frequency between this study and reference^[12]

Geometry	β	i	Natural frequency, C_i		Deviation (%)**
			This study	Reference	
Parabolic H-H*	0.01	1	28.11	28.08	0.107
		2	129.42	129.39	0.023
		3	296.07	297.71	0.554
		4	534.22	533.29	0.174
	0.1	1	25.87	25.68	0.388
		2	118.59	118.35	0.202
		3	270.64	272.30	0.613
		4	490.55	487.77	0.567
Parabolic C-C*	0.02	1	84.52	83.93	0.698
		2	238.22	235.99	0.936
		3	462.35	466.47	0.891
		4	783.27	774.01	1.182
	0.2	1	70.91	70.61	0.423
		2	200.31	198.53	0.889
		3	389.87	392.43	0.657
		4	660.21	651.16	1.371

* H: hinged end, C: clamped end

** Deviation (%) = |(this study - reference) / this study| × 100

치해를 비교한 것이다. 해당 문헌은 원형과 정사각형 중공 단면을 갖는 보-기둥의 자유진동에 관한 수치해석적 연구로, 제 변수 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰한 논문이다. 문헌에서 정의한 단면형상 및 변단면 형태 등의 조건과 일치시키기 위하여 제 변수를 표에 나타낸 바와 같이 적용하였다. 이 연구와 문헌의 결과를 살펴보면 원형($n = \infty$) 및 정4각형($n = 4$) 단면에 대한 C_i 값의 오차가 매우 작게 나타나 본 연구에서 유도한 이론식 및 수치해석과 정의의 타당성을 검증할 수 있다.

3.2 자유진동 해석

Fig. 4는 회전-회전의 단부조건을 갖고, $n = 3, \beta = 0.2, p = 1.0$ 인 중공 보-기둥의 단면비 α 에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. α 값이 증가하면 C_i 는 증가하다가 정점에서 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. 따라서 C_i 값이 최대가 되는 α 값이 존재함을 알 수 있으며, 이때의 α 값이 주어진 조건에서 무차원 고유진동수가 가장 큰 단면비이다. 이 그림에서는 제1무차원 고유진동수 C_1 값이 최대가 될 때의 (α, C_1) 좌표를 ▲로 표시하였다. 그림에 나타낸 보-기둥의 경우 $\alpha = 1.8$ 에서 $C_1 = 15.04$ 로 최대값을 갖는다. 이러한 결과를 이용하면 주어진 조건에서 C_1 값이 최대가 되는 보-기둥의 기하형상을 결정할 수 있다.

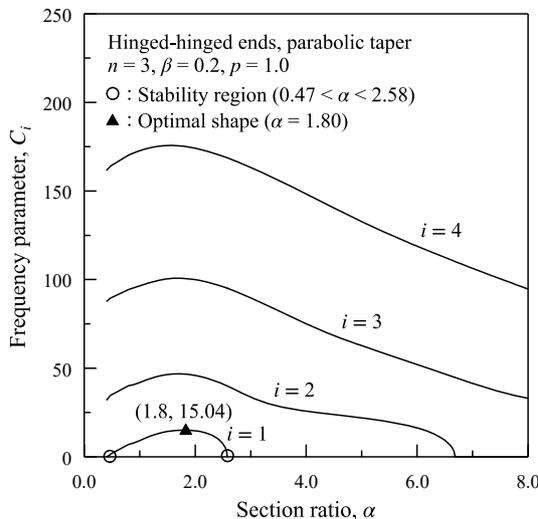


Fig. 4. C_i - α curves

한편 이 그림을 살펴보면 α 값의 증가에 따라 제1무차원 고유진동수 C_1 값이 감소하다가 끝내 “0”이 되는 것을 알 수 있다. 이 때 대상부재는 동적개념에 의해 산정된 좌굴영

역에 놓여 불안정한 상태가 된다. 즉 $C_1 = 0$ 일 때의 α 값이 대상 보가 좌굴에 대한 안정을 유지할 수 있는 임계값이며, 이 값을 그림에 ○로 표시하였다. Fig. 4에 나타낸 보-기둥의 경우 $0.47 < \alpha < 2.58$ 의 범위가 대상 보의 안정영역이며, $\alpha < 0.47$ 과 $\alpha > 2.58$ 의 범위는 불안정영역이 된다.

3.3 최적단면 결정

앞의 Fig. 4에서 살펴본 바와 같이 단면비 α 가 증가함에 따라 무차원 고유진동수 C_i 는 증가하다가 정점에서 최대치를 보인 후에 다시 감소한다. 무차원 고유진동수 C_i 값이 최대일 때 대상부재는 질량대비 강성이 가장 크다. 이 논문에서는 물리적으로 가장 중요한 의미를 갖는 제1무차원 고유진동수가 최대가 되는 단면비를 최적단면비 α_{opt} 로 정의하였다. 이러한 최적단면비 α_{opt} 에 영향을 미치는 영향인자는 무차원 하중 p 와 두께비 β 이다. 이 연구에서는 실구조의 설계에 유용하도록 p 와 β 에 따른 α_{opt} 의 관계식을 제시하고자 한다. 여기에서는 선형 변단면, 원형단면을 갖는 부재에 대하여 고찰하였다.

Fig. 5는 회전-회전의 단부조건을 갖고, $\beta = 0.2$ 인 중공 보-기둥의 단면비 α 에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 하중단계별로 나타낸 것이다. 이 그림에 보인 바와 같이 각각의 하중단계에서 무차원 고유진동수가 최대가 되는 α_{opt} 값을 산정할 수 있다. 예로서 그림에 나타낸 $p = 1.0$ 인 경우 최적단면비 $\alpha_{opt} = 0.602$ 에서 최대무차원 고유진동수 $C_{max} = 5.111$ 로 계산되었다. 또한 이 그림에서 무차원 고유

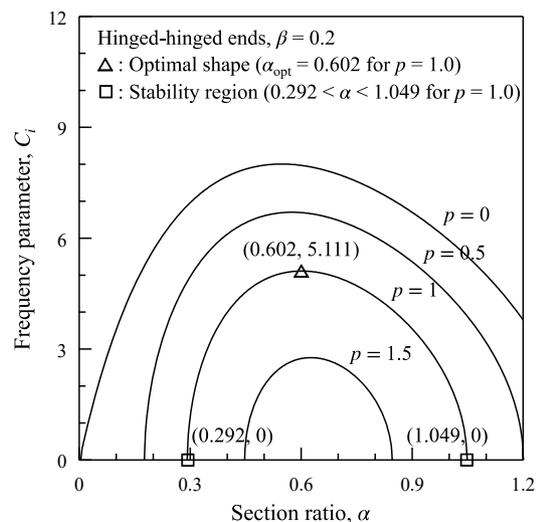


Fig. 5. C_i - α curves by load parameter

진동수가 “0”이 되어 대상부재가 좌굴되는 불안정영역이 존재함을 알 수 있다. 예로 나타낸 $p = 1.0$ 인 경우 $\alpha = 0.292$ 와 $\alpha = 1.049$ 에서 무차원 고유진동수가 “0”이 됨을 알 수 있다. 즉 해당 조건의 보-기둥에서 제1무차원 고유진동수는 $0.292 < \alpha < 1.049$ 사이에서만 존재하며, $\alpha \leq 0.292$ 또는 $\alpha \geq 1.049$ 의 구간은 무차원 고유진동수가 “0”이 되는 영역, 즉 불안정영역에 해당하게 된다. 이 연구에서는 무차원 고유진동수 C 가 존재하는 최소 단면비를 α_{min} , 최대 단면비를 α_{max} 으로 나타내었다. 또한 이 그림에서 무차원 고유진동수가 존재하는 안정영역, 즉 $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ 는 무차원 하중 p 가 커질수록 점점 좁아짐을 알 수 있다.

Fig. 6은 Fig. 5에 보인 하중단계별 안정영역과 최적단면을 3차원 그림으로 나타낸 것이다. 그림에 보인 모든 하중 단계에서 단면비 α 가 증가함에 따라 제1무차원 고유진동수 C 는 증가하다가 감소하며, 이 때 C 가 최대값을 갖는 α_{opt} 가 존재함을 잘 보여주고 있다. 또한 모든 하중단계에서 C 값이 “0”이 되는 구간, 즉 불안정영역이 존재함을 알 수 있다. 그림에 블록하게 표시된 구간은 무차원 고유진동수 C 가 존재하는 동적 안정영역이며, 이는 무차원 하중 p 값이 커질수록 점점 좁아지다가 마침내 어떤 단면비를 갖더라도 $C = 0$ 이 되는 p 값이 존재한다. 이 때 대상 보-기둥은 물리적으로 좌굴된 상태이며, 이때의 p 값이 동적개념에 의해 산정된 좌굴하중이다. 이 그림에서 보인 보-기둥을 예로 들면 $p = 1.71$ 이 대상 부재가 저항할 수 있는 최대의 무차원 하중이며, 이때의 단면비 $\alpha_{opt} = 0.636$ 이 최대의 강성을 갖는 단면비이다. 즉 그림에 보인 부재는 $p > 1.71$ 이 되면 어떠한 단면비에서도 좌굴하여 불안정한 상태에 들게 된다.

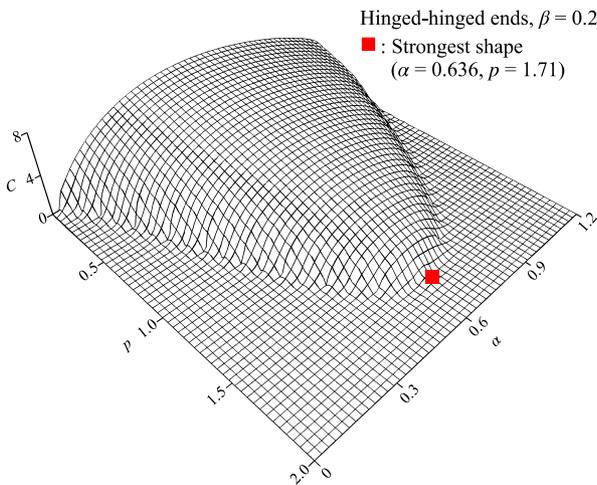


Fig. 6. C_i - p - α curves

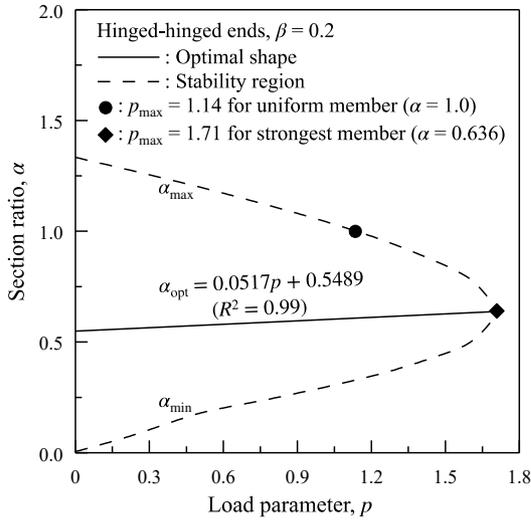
Table 2는 하중단계에 따른 α_{opt} , C_{max} , α_{min} 및 α_{max} 를 단부조건별로 나타낸 것이다. 여기에서 회전-회전의 조건은 Fig. 6에 나타낸 보-기둥의 값을 나타낸 것이다. 이 표를 보면 최적 단면비 α_{opt} , 최대의 무차원 고유진동수 C_{max} 및 안정영역의 한계값이 되는 α_{min} 과 α_{max} 는 무차원 하중 p 에 따라 달라짐을 알 수 있다. 또한 무차원 하중 p 가 증가함에 따라 최대 무차원 고유진동수 C_{max} 는 점점 감소하다가 결국 “0”에 이르게 되며, “0”이 되기 직전의 C_{max} 값을 갖는 p 가 대상 부재가 저항할 수 있는 최대의 무차원 하중 p_{max} 이다. 이 표에서는 회전-회전의 단부조건을 갖는 부재의 $p_{max} = 1.71$, 회전-고정은 $p_{max} = 1.88$, 고정-고정은 $p_{max} = 2.60$ 의 값을 갖는다. 즉 이 값 이상의 무차원 하중이 작용하게 되면 대상부재는 좌굴되어 동적 저항능력을 상실하게 된다.

Table 2. Dynamic optimal shape and stability region by p

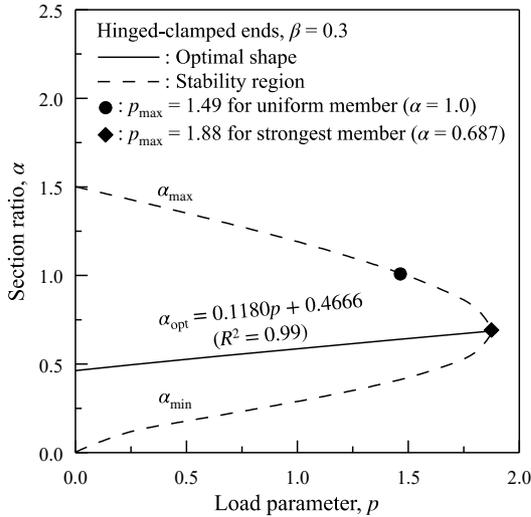
Geometry	p	α_{opt}	C_{max}	α_{min}	α_{max}
H-H $\beta = 0.2$	0.00	0.547	8.006	0.005	1.333
	0.50	0.575	6.702	0.177	1.200
	1.00	0.602	5.111	0.293	1.048
	1.50	0.626	2.768	0.448	0.845
	1.71*	0.636	0.191	0.623	0.649
H-C $\beta = 0.3$	0.00	0.463	10.05	0.003	1.501
	0.50	0.528	8.520	0.178	1.352
	1.00	0.586	6.747	0.289	1.191
	1.50	0.644	4.401	0.424	0.997
	1.88*	0.687	0.210	0.674	0.700
C-C $\beta = 0.5$	0.00	0.000	21.95	0.000	1.618
	1.00	0.268	12.15	0.232	1.241
	2.00	0.424	6.941	0.397	0.872
	2.50	0.507	2.893	0.499	0.633
	2.60*	0.524	0.929	0.523	0.538

* p_{max}

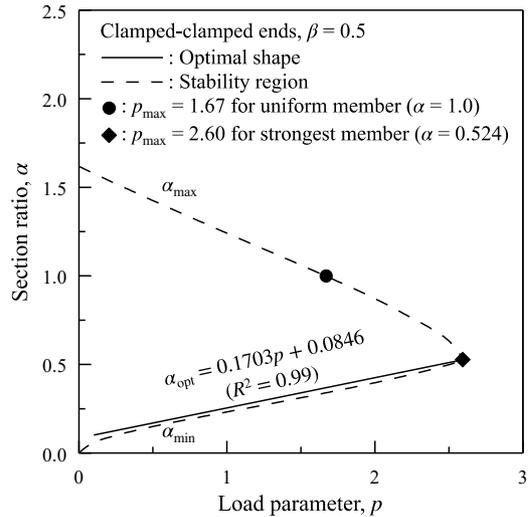
Fig. 7은 Table 2에 나타낸 보-기둥의 하중 p 와 최적 단면비 α_{opt} , 최소 단면비 α_{min} 및 최대 단면비 α_{max} 사이의 관계를 그림으로 나타낸 것이다. Fig. 7(a)는 회전-회전, Fig. 7(b)는 회전-고정, Fig. 7(c)는 고정-고정의 단부조건을 갖는 부재에 대하여 나타내었다. 이 그림들에서 실선은 무차원 하중 p 에 따른 최적 단면비 α_{opt} 의 변화를 나타낸 것이며, 점선은 α_{min} 과 α_{max} 으로 나타낸 안정영역을 나타낸다. 즉 점선으로 표시된 부분의 안쪽이 안정영역에 해당되며, 점선의 바깥부분이 불안정영역이다. 여기에서 \blacklozenge 로 표시된 점은 부재를 변단면으로 제작하는 경우 최적 단면비 α_{opt} 에서 갖게



(a) Hinged-hinged, $\beta = 0.2$



(b) Hinged-clamped, $\beta = 0.3$



(c) Clamped-clamped, $\beta = 0.5$

Fig. 7. p - α_{opt} curves

되는 최대 무차원 하중 p_{max} 이며, ●로 표시된 점은 동일한 체적의 등단면 부재, 즉 $\alpha = 1.0$ 에서 갖게 되는 최대 무차원 하중 p_{max} 값을 나타낸 것이다. 이 값을 비교해보면 Fig. 7(a)에 보인 조건의 등단면($\alpha = 1.0$) 부재에 비하여 동일 조건의 변단면($\alpha = 0.636$) 부재는 동일체적에서 $1.71/1.14 = 1.50$ 으로 동적 강성이 50% 증가함을 알 수 있다. Fig. 7(b)의 경우에는 등단면($\alpha = 1.0$) 부재에 비하여 동일 조건의 변단면($\alpha = 0.687$) 부재가 $1.88/1.49 = 1.26$ 으로 26%, Fig. 7(c)의 경우에는 등단면($\alpha = 1.0$) 부재에 비하여 동일 조건의 변단면($\alpha = 0.524$) 부재가 $2.60/1.67 = 1.56$ 으로 56% 증가함을 알 수 있다. 따라서 이 연구의 결과를 이용하면 동일한 체적과 지간길이에서 등단면 보-기둥에 비하여 동적 강성이 매우 우수한 변단면의 형태를 결정할 수 있다.

실구조의 설계에 쉽게 적용할 수 있는 예를 보이도록 Fig. 7에 실선으로 나타낸 그래프를 회귀분석하여 p 와 α_{opt} 의 관계식을 아래와 같이 산정하였다. 이 식들을 이용하면 주어진 조건하에서 무차원 하중 p 값에 따른 최적단면비 α_{opt} 값을 쉽게 산정할 수 있다. 단, 여기에 나타난 p - α_{opt} 관계식은 주어진 단부조건 및 두께비에만 해당된다.

$$\alpha_{opt} = 0.0517p + 0.5489 \quad (R^2 = 0.99) \quad (62)$$

for hinged - hinged ends and $\beta = 0.2$

$$\alpha_{opt} = 0.1180p + 0.4666 \quad (R^2 = 0.99) \quad (63)$$

for hinged - clamped ends and $\beta = 0.3$

$$\alpha_{opt} = 0.1703p + 0.0846 \quad (R^2 = 0.99) \quad (64)$$

for clamped - clamped ends and $\beta = 0.5$

앞에서 언급한 바와 같이 최적단면비 α_{opt} 에 영향을 미치는 영향인자는 무차원 하중 p 와 두께비 β 이다. 이제 여기에서는 두께비 β 에 따른 α_{opt} 의 관계식을 제시하고자 한다. 마찬가지로 실구조에서 가장 많이 이용되는 선형 변단면과 원형단면을 갖는 중공 보-기둥에 대하여 β 에 따른 안정영역과 최적단면의 예를 나타내었다.

Table 3은 두께비 β 에 따른 최적단면비와 안정영역의 예를 단부조건별로 나타낸 것이다. 이 표를 보면 최적 단면비 α_{opt} , 최대의 무차원 고유진동수 C_{max} 및 안정영역의 한계값이 되는 α_{min} 과 α_{max} 는 모두 두께비 β 에 따라 달라짐을 알 수 있다. 또한 두께비 β 가 증가함에 따라 최대 무차원 고유진동수 C_{max} 는 점점 감소하며, 안정영역의 범위 $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$ 값도 그 범위가 점점 줄어든다. 이는 β 값이 커질수록 동일체적에서 세장비가 커지게 되고, 이에 따라 동적강

성이 저하되어 나타나는 결과이다. $\beta = 0.1$ 인 증공단면에 비해 $\beta = 1.0$ 인 증실단면의 최대 무차원 고유진동수 C_{max} 를 비교하면, 회전-회전의 단부조건을 갖고, $p = 0.1$ 인 경우에는 77.38 %, 회전-고정, $p = 0.3$ 인 경우 76.09 %, 고정-고정, $p = 0.5$ 인 경우에는 77.40 % 감소한다. 증실단면에 비해 증공단면의 동적강성이 매우 우수함을 알 수 있다.

Table 3. Dynamic optimal shape and stability region by β

Geometry	β	α_{opt}	C_{max}	$(\alpha_{min}, \alpha_{max})$	Deviation (%) [*]
H-H $p = 0.1$	0.1	0.552	11.24	(0.068, 1.308)	0.00
	0.2	0.559	7.508	(0.102, 1.281)	-33.20
	0.3	0.565	5.780	(0.132, 1.251)	-48.58
	0.5	0.578	3.973	(0.188, 1.186)	-64.65
	1.0	0.597	2.542	(0.271, 1.077)	-77.38
H-C $p = 0.3$	0.1	0.475	17.66	(0.070, 1.474)	0.00
	0.2	0.489	11.84	(0.103, 1.445)	-32.96
	0.3	0.503	9.152	(0.131, 1.413)	-48.18
	0.5	0.530	6.371	(0.184, 1.344)	-63.92
	1.0	0.572	4.223	(0.261, 1.232)	-76.09
C-C $p = 0.5$	0.1	0.074	44.61	(0.056, 1.583)	0.00
	0.2	0.107	28.82	(0.084, 1.546)	-35.40
	0.3	0.134	21.83	(0.108, 1.506)	-51.06
	0.5	0.181	14.92	(0.150, 1.425)	-66.55
	1.0	0.241	10.08	(0.206, 1.302)	-77.40

^{*} Deviation(%) = $(C_{max(\beta=0.1)} - C_{max}) / C_{max(\beta=0.1)} \times 100$

Fig. 8은 두께비 β 와 최적 단면비 α_{opt} , 최소 단면비 α_{min} 및 최대 단면비 α_{max} 사이의 관계를 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림들에서 실선은 β 와 α_{opt} 의 관계를 나타낸 것이며, 점선은 α_{min} 과 α_{max} 으로 나타낸 안정영역을 나타낸다. 점선 안쪽 부분이 안정영역, 점선의 바깥부분이 불안정영역이다. 이 그림들을 회귀분석하여 β 와 α_{opt} 의 관계식을 아래와 같이 산정하였다. 이 식들을 이용하면 주어진 조건하에서 두께비 β 값에 따른 최적단면비 α_{opt} 값을 쉽게 산정할 수 있다. 단, 여기에 나타낸 β - α_{opt} 관계식은 주어진 단부조건 및 무차원 하중에만 해당된다.

$$\alpha_{opt} = 0.5438 + 0.1412\beta - 0.0471\beta^2 \quad (R^2 = 0.99) \quad (65)$$

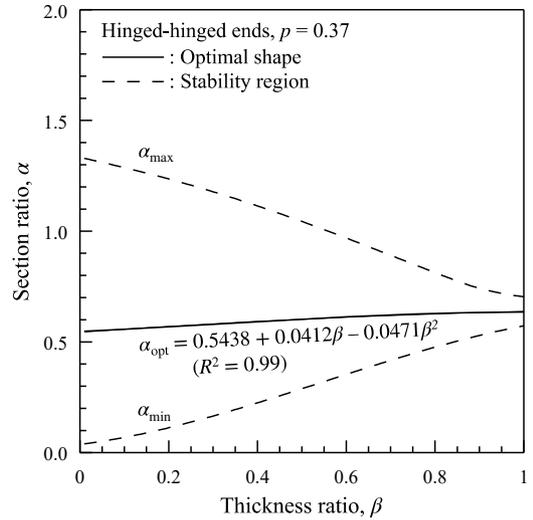
for H - H ends and $p = 0.37$

$$\alpha_{opt} = 0.4553 + 0.3474\beta - 0.1088\beta^2 \quad (R^2 = 0.99) \quad (66)$$

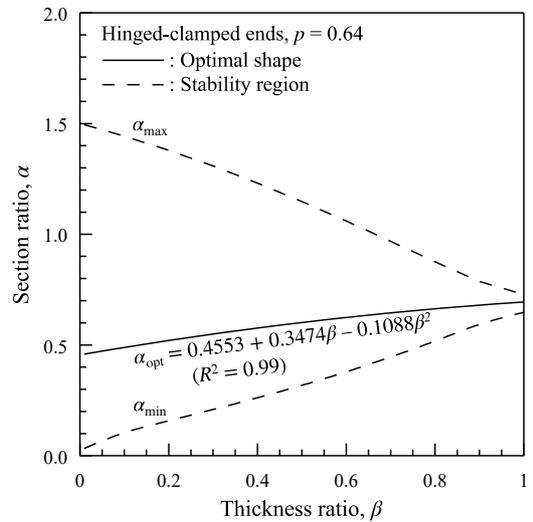
for H - C ends and $p = 0.64$

$$\alpha_{opt} = 0.0419 + 0.7887\beta - 0.3021\beta^2 \quad (R^2 = 0.99) \quad (67)$$

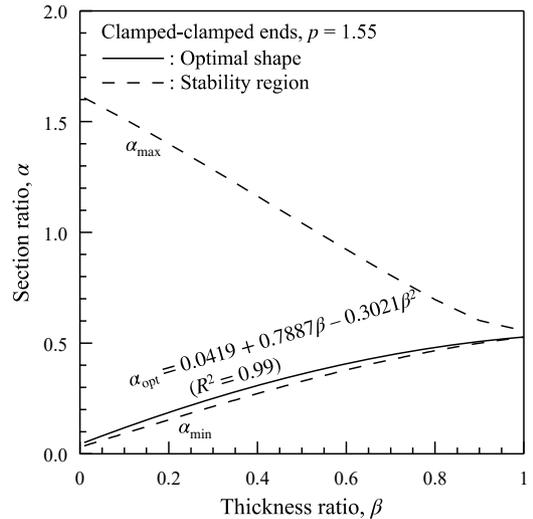
for C - C ends and $p = 1.55$



(a) Hinged-hinged, $p = 0.37$



(b) Hinged-clamped, $p = 0.64$



(c) Clamped-clamped, $p = 1.55$

Fig. 8. β - α_{opt} curves

4. 결론

이 연구는 최대의 고유진동수를 갖는 변단면 증공 보-기 등의 최적단면에 관한 연구이다. 대상 부재의 단면은 정다각형의 증공단면을 채택하였으며, 단면깊이가 직선, 포물선 및 정현형으로 변화하는 변단면을 채택하였다. 증공단면을 갖는 일정체적 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 무차원화하였다. 대상 부재의 고유진동수를 효율적으로 산출할 수 있는 수치해석 기법을 개발하고 이를 해석하여 최대의 고유진동수를 갖는 최적단면과 고유진동수가 “0”이 되는 불안정영역에 대하여 고찰하였다. 고찰된 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 단면비가 증가하면 무차원고유진동수는 증가하다가 최대값을 보인 후에 감소한다. 동일체적에서 최대의 무차원고유진동수를 갖는 단면비를 최적단면비로 결정하였다.
- (2) 하중이 증가하면 무차원고유진동수는 감소하다가 “0”이 된다. 이때의 하중이 동적개념에 의해 산정된 무차원 좌굴하중이다.
- (3) 하중별로 무차원고유진동수가 “0”이 되는 단면비가 존재하며, 이 때 부재는 좌굴하여 불안정영역에 놓이게 된다.
- (4) 증공단면의 두께비가 증가하면 무차원고유진동수는 감소하며, 증실단면에 비해 증공단면의 동적강성이 크다.

이 연구의 결과는 동하중이 작용하는 구조물의 동적설계에 기여할 뿐만 아니라 동일한 강성에서는 최소의 자중을 가질 수 있으므로 최소중량 개념의 최적설계에도 매우 유용한 자료가 될 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2018학년도 원광대학교의 교비지원에 의해 수행되었습니다. 이에 감사드립니다.

참고문헌(References)

- [1] Hikami, Y. (1982) Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation, *IHI Report*, IHI Corporation, Vol.6, pp.47-52.
- [2] Haftka, R.T., Gürdal, Z., and Kamat, M.P. (1990) *Element of Structural Optimization* (2nd Ed.), Kluwer Academic Publishers, USA.
- [3] Chung, T.J. (2019) Dynamic Response of Short-Span Highway Bridges on Local Road by Vehicle Type, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.31, No.5, pp.321-330 (in Korean).
- [4] Hwang, E.S., Kim, D.Y., and Jang, S.H. (2017) Analysis of Dynamic Response and Vibration Mitigation for Steel Box Girder Railway Bridges, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.29, No.6, pp.487-495 (in Korean).
- [5] Riedel, C.H., and Kang, B.S. (2006) Free Vibration of Elastically Coupled Dual-Span Curved Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, Vol.290, pp.820-838.
- [6] Son, J.H., and Kim, J.-W. (2016) Dynamic Characteristics of Space Framed Structures by Using Nonlinear Transient Analysis, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.28, No.6, pp.395-402 (in Korean).
- [7] Lee, B.K., and Wilson, J.F. (1989) Free Vibrations of Arches with Variable Curvature, *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, Vol.136, No.1, pp.75-89.
- [8] Clough, R.W., and Penzien, J. (1975) *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, USA.
- [9] Mo, J.M. (1992) *A Study of Free Vibrations of Tapered Columns with Axial Load*, Master's Thesis, Wonkwang University, Korea (in Korean).
- [10] Gere, J.M., and Timoshenko, S.P. (1984) *Mechanics of Materials* (2nd Ed.), Book/Cole Engineering Division, USA.
- [11] Al-Khafaji, A.W., and Tooley, J.R. (1986) *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., USA.
- [12] Lee, T.E., Yoon, H.M., Park, C.E., and Jeong, K.S. (2010) Free Vibrations of Beam-Columns with Squared Hollow Section, *Proceedings of Annual Conference of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, pp. 223-224 (in Korean).

요 약: 이 논문은 최대고유진동수를 갖는 변단면 증공 보-기둥의 최적단면에 관한 연구이다. 대상 보-기둥은 단면의 깊이가 직선, 포물선, 정현형으로 변화하는 정다각형 변단면 부재로 주어진 기하조건에 대하여 항상 동일한 체적과 길이를 갖는다. 대상부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 해석하여, 고유진동수를 산정하고 최적단면을 결정할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하였다. 수치해석으로 고유진동수와 단면비, 두께비 및 축하중의 관계를 고찰하였다. 최대의 고유진동수를 갖는 최적단면과 무차원 고유진동수가 “0”이 되는 불안정영역을 고찰하였다.

핵심용어: 최적단면, 안정영역, 자유진동, 증공 보-기둥, 변단면, 일정체적
