

적층복합 T형 보의 휨 해석

백성용^{1*}

¹교수, 인제대학교, 토목도시공학부

Flexural Analysis of Laminated Composite T-Beams

Back, Sung Yong^{1*}

¹Professor, School of Civil and Urban Engineering, Inje University, Gimhae, 621-749, Korea

Abstract - A shear-flexible beam element is presented for the flexural analysis of laminated composite T-beams with arbitrary lay-ups. Based on the first-order shear deformable beam theory, the derived element takes into account warping shear deformation and all coupling coming from material anisotropy. Three different types of beam elements, namely, the two-noded, three-noded, and four-noded beam elements with seven degree-of-freedom per node are developed to solve governing equations. To demonstrate the versatility and accuracy of the beam element formulated, numerical results are performed for symmetric and anti-symmetric angle-ply composite T-beams under the uniformly distributed and concentrated load. The effects of fiber angle and shear deformation are investigated for different laminated stacking sequence. The quadratic and cubic elements are shown to be applicable to the flexural analysis of composite T-beams.

Keywords - Shear-flexible beam element, Composite T-beams, Shear deformation, Fiber angle

1. 서론

섬유보강 복합재료(FRP, Fiber-Reinforced Plastic)는 기존의 강재나 콘크리트 재료들에 비해 가벼운 자중, 강도가 우수하며 피로강도가 높고 부식 저항성과 내구성이 뛰어나서 토목, 기계, 항공, 해양 분야에서의 사용이 증가하고 있는 추세이다. 또한, 이러한 재료의 사용으로 운반의 편의성, 시공기간 단축, 재료 및 유지관리비 절감 등의 효과를 얻을 수 있다. 그러나 뛰어난 강도와 재료 특성으로 복합재 구조물은 변형이 종종 크게 일어나며 재료강도에 도달하기 전에 전체 좌굴 또는 국부좌굴이 발생할 수 있다.

하중 편심이 없이 다른 부재와의 연결이 용이한 T형 부재

는 일반적으로 브레이싱 부재나 트러스의 현재로 널리 사용되고 있다. 이러한 부재는 단대칭(monosymmetric)이며 다른 형상의 박벽 개보에 대해 상대적으로 낮은 비틀림 강성을 가지고 있다. 또한, 대칭축에 대한 휨 변형은 비틀림 변형과 연계되어 있다. 따라서 T형 부재는 이축 대칭단면보다 횡-비틀림 좌굴에 영향을 받게 되므로 설계과정에서 변형과 좌굴에 대한 검토는 매우 중요한 부분을 차지하게 된다.

Bauld and Tzeng^[1]은 Vlasov^[2]의 기존 등방성 박벽보 이론을 대칭 적층된 복합재 개구단면 이방성 박벽보로 확장된 개념을 적용하여 휨과 비틀림에 대한 선형 및 비선형 방정식을 유도하였다. 이후 많은 연구자들이 적층복합 보의 정적 거동에 대한 해석적 방법과 실험 결과를 제시하고 있으나 대부분의 연구는 대칭적층된 이축대칭 단면^{[3],[4],[5],[6],[7]}에 국한되었다. 반면에, 일축대칭 단면에 대한 연구는 상대적으로 적으며 I형 단면^{[8],[9]}과 채널 단면^{[10],[11],[12]}에 국한되었고 T형 단면에 대한 연구는 아주 제한적인 상태이다. Lee and Back^[13], Lee^[14]는 축방향 압축력을 받는 인발성형 T형 및 H형 부재의 이론적 좌굴해석과 실험결과를 비교·분석하였다. 전단탄성계수에 대한 축방향 탄성계수의 비가 상대적으

Note.-Discussion open until April 30, 2015. This manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on June 24, 2014; revised July 28, 2014; approved on July 30, 2014.

Copyright © 2014 by Korean Society of Steel Construction

*Corresponding author.

Tel. +82-55-320-3433 Fax. +82-55-321-3410

E-mail. civsyb@inje.ac.kr

로 큰 섬유보강 플라스틱 복합부재의 구조적 거동에 대한 체계적인 연구가 필요하다.

본 연구에서는 적층복합 T형 보의 휨 해석을 위해 전단에 유연한 블록강성 행렬을 제안한다. 제안된 보 요소는 뒹 전단변형과 재료의 비등방성 성질에 따른 모든 연계성을 고려한다. 1차 전단변형 보 이론을 사용해 변위장이 정의된다. 전체 위치에너지의 원리에 따라 절점 당 7개의 자유도를 갖는 세가지 보 요소; 2절점, 3절점, 4절점의 보 요소와 함께 새로운 블록 강도행렬을 제안한다. 제안된 보 요소의 유효성과 정확성을 검증하기 위해 등분포하중과 집중하중을 받는 대칭 및 비대칭 앵글플라이 복합 T형보에 대해 수치해석을 수행하고 ABAQUS 유한요소 결과와 비교·분석한다. 또한, 제안된 각 보 요소에 대한 수렴성, 적층각 및 적층형태, 전단 변형에 대한 영향을 조사한다.

2. 지배방정식

2.1 변위장 및 변형률

본 연구에서는 Fig. 1에서처럼 서로 상호 연관되어 있는 세 종류의 좌표계가 사용된다. 첫 번째 좌표계는 보의 길이 방향이 x축인 직교좌표계 (x, y, z)이다. 두 번째는 국부좌표 (n, s, x)로서 n축은 평판요소로부터 연직방향, s축은 중심면의 접선방향이며 단면의 등고선을 따라 형성된다. 세 번째는 형상좌표계(contour coordinate system)로서 원점 O로부터의 임의의 점 접선방향 s이다.

본 연구에서 적용한 보 모델은 다음과 같은 가정을 사용하였다.

- (1) 보 단면의 형상 즉 외형(contour)은 면내에서 변형하

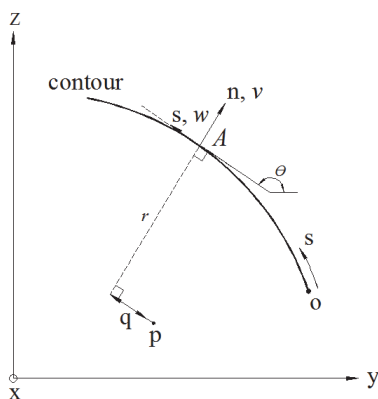


Fig. 1. Definition of coordinates in thin-walled section

지 않는다.

- (2) 연직 전단효과(transverse shear effects)는 고려되어진다. 즉, 변형 전 보의 축방향에 수직인 단면은 변형 후 평면을 유지하나 전단변형에 의해 보의 축방향에 수직일 필요는 없다.
- (3) 전단중심에서의 비틀림각은 상당히 작다.

보의 변위장은 단면형상 변화는 일어나지 않는다는 평면내 강성단면 가정과 종방향 변위는 Timoshenko 보이론과 수정된 Vlasov 박벽보 이론을 결합하여 축방향 투영단면의 면 변형과 면의 뒹변형의 합으로 표현된다. Fig.1과 같은 기하학적 조건과 변위-변형도 관계로부터 판요소 중립면에서의 변위장 \bar{v} , \bar{w} 와 종방향 변위 \bar{u} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(s, x) &= U(x) + \theta_y(x)y(s) + \theta_z(x)z(s) + \phi_\omega(x)\omega(s) \\ \bar{v}(s, x) &= V(x)\sin\theta(s) - W(x)\cos\theta(s) - \Phi(x)q(s) \\ \bar{w}(s, x) &= V(x)\cos\theta(s) + W(x)\sin\theta(s) + \Phi(x)r(s) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ 는 각각 x , y , z 축방향의 강제 변위장; $\theta_y(x)$, $\theta_z(x)$, $\phi_\omega(x)$ 는 각각 y , z , ω 축방향에 대한 회전각; $\Phi(x)$ 는 극축에 대한 회전각을 나타낸다. 뒹 함수 $\omega(s)$ 는 뒹 변형이며 다음과 같이 주어진다.

$$\omega(s) = \int r(s)ds \quad (2)$$

여기서 $r(s)$ 는 전단중심에서 각 중립면까지의 거리를 나타낸다.

식 (1)의 종방향 변위장에서 뒹 전단변형을 포함하기 때문에 변형에 따른 휨 전단변형 $\theta_y(x)$ 와 $\theta_z(x)$ 는 각 변위장의 미분값에 일치하지 않으며, 뒹 전단변형으로 인하여 $\phi_\omega(x)$ 는 $\Phi'(x)$ 와 같지 않다. 각 축에 대한 회전각은 아래 식으로 정의된다.

$$\begin{aligned} \theta_y &= \gamma_{xz}^0 - W' \\ \theta_z &= \gamma_{xy}^0 - V' \\ \phi_\omega &= \gamma_\omega^0 - \Phi' \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 γ_{xy}^0 와 γ_{xz}^0 는 부재의 휨에 의한 연직방향 전단 변형률이고 γ_ω^0 는 휨에 의한 비틀림 전단 변형률이다. (')는 x 에

대한 미분을 나타낸다.

단면의 임의 점에서의 변위장은 중립면의 변위에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u(s,x,n) &= \bar{u}(s,x) + n\bar{\psi}_x(s,x) \\ v(s,x,n) &= \bar{v}(s,x) \\ w(s,x,n) &= \bar{w}(s,x) + n\bar{\psi}_s(s,x) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\bar{\psi}_x$ 와 $\bar{\psi}_s$ 는 각각 x 축과 s 축에 대한 회전각을 나타내며 n 은 접면에 수직방향(면외방향)을 나타낸다.

식 (1)과 (4)의 변위장에 대한 보의 변형률은 아래와 같이 표현되어진다.

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 + (z - n \cos\theta)\kappa_y + (y + n \sin\theta)\kappa_z + (w - nq)\kappa_w \quad (5a)$$

$$\gamma_{sx} = \gamma_{xy}^0 \cos\theta + \gamma_{xz}^0 \sin\theta + \gamma_w^0 \gamma + n\kappa_{sx} \quad (5b)$$

$$\gamma_{nx} = \gamma_{xy}^0 \sin\theta - \gamma_{xz}^0 \cos\theta - \gamma_w^0 q \quad (5c)$$

여기서 ϵ_x^0 , κ_y , κ_z , κ_w , κ_{sx} 는 축 변형률, y 축과 z 축의 곡률 성분, 뒹 곡률, 비틀림 곡률을 각각 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= U' \\ \kappa_y &= \theta_y' \\ \kappa_z &= \theta_z' \\ \kappa_w &= \phi_w' \\ \kappa_{sx} &= \Phi' - \phi_w \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 변분의 원리

구조체의 전체 위치에너지는 변형률 에너지 U 와 작용하중에 대한 위치에너지 Ω 의 합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi = U + \Omega \quad (7)$$

박판이론의 기본적인 가정에 따라 변형 판의 변형률 에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_{sx} \gamma_{sx} + \sigma_{nx} \gamma_{nx}) dv \quad (8)$$

식 (5)을 식 (8)에 대입하고 변형률 에너지의 변분을 취하여 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta U = \int_l \{ & N_x \delta \epsilon_x^0 + M_y \delta \kappa_y + M_z \delta \kappa_z + M_\omega \delta \kappa_\omega \\ & + V_y \delta \gamma_{xy}^0 + V_z \delta \gamma_{xz}^0 + T \delta \gamma_w^0 + M_t \delta \kappa_{xs} \} dx \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 N_x , V_y , V_z , M_y , M_z , T , M_t , M_ω 는 축력, y 와 z 축에 대한 전단력과 휨모멘트, 총 비틀림 모멘트, bimoment를 각각 나타내며 아래와 같이 보의 응력으로 정의된다.

$$N_x = \int_A \sigma_x dsdn \quad (10a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x (z - n \cos\theta) dsdn \quad (10b)$$

$$M_z = \int_A \sigma_x (y + n \sin\theta) dsdn \quad (10c)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma_x (\omega - nq) dsdn \quad (10d)$$

$$V_y = \int_A (\sigma_{sx} \cos\theta + \sigma_{nx} \sin\theta) dsdn \quad (10e)$$

$$V_z = \int_A (\sigma_{sx} \sin\theta - \sigma_{nx} \cos\theta) dsdn \quad (10f)$$

$$T = \int_A (\sigma_{sx} r - \sigma_{nx} q) dsdn \quad (10g)$$

$$M_t = \int_A \sigma_{sx} n dsdn \quad (10h)$$

외력에 의한 위치에너지의 변분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \Omega = \int_l (& p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + m_x \delta \Phi + m_y \delta \theta_y \\ & + m_z \delta \theta_z + b \delta \phi_\omega) dx + [P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w \\ & + M_x \delta \Phi + M_y \delta \theta_y + M_z \delta \theta_z + B \delta \phi_\omega]_o^l \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 p_x , p_y , p_z , m_x , m_y , m_z , b 는 x , y , z 축에 대한 분

포하중, 분포모멘트, 분포 bimoment; $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z, B$ 는 x, y, z 축에 대한 집중하중, 집중모멘트, 집중 bimoment를 각각 나타낸다.

총 위치에너지 변분이 0이 되는 원리를 적용하면 다음의 식을 구하게 된다.

$$0 = \int_1 \{N_x \delta u' + M_y \delta \theta_y' + M_z \delta \theta_z' + M_\omega \delta \phi_\omega' + V_z \delta (W' + \theta_y) + V_y \delta (V' + \theta_z) + T \delta (\phi_\omega + \Phi') + M_t \delta (\Phi' - \theta_\omega) - (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + m_x \delta \Phi + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z + b \delta \phi_\omega)\} dx - [P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w + M_x \delta \Phi + M_y \delta \theta_y + M_z \delta \theta_z + B \delta \phi_\omega]_0^l \quad (12)$$

2.3 박판 구성방정식

단면의 국부좌표계에서 k 번째 층의 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{sx} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{sx} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서 \bar{Q}_{ij}^* 는 압축된 축소 변형강성(condensed transformed stiffness coefficients)을 나타내며 각 층에 대한 재료의 물성치로 구성되어 있다. 단면의 외형방향에 대한 응력($\sigma_s = 0$)과 변형률($\epsilon_s = 0$)이 0이라는 가정에 대한 구체적인 구성방정식은 다른 문헌^[15]에 정의되어 있다.

면의 응력과 변형률의 구성관계는 아래와 같이 주어진다.

$$\tau_{nx} = \bar{Q}_{55} \gamma_{nx} \quad (14)$$

구성방정식 (13)과 (14)의 응력을 식 (10)에 대입하여 정리하면 적층복합 박벽부재의 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ -M_z \\ M_\omega \\ M_t \\ V_y \\ V_z \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \\ \kappa_{sx} \\ \gamma_{xy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \gamma_\omega^o \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서 E_{ij} 는 복합부재 단면에 의해 결정되는 적층강성이며 단면 두께방향에 대한 적분을 수행하여 정리하면 0이 아닌 강성 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{11} &= A_{11}^\beta b_\beta \\ E_{12} &= A_{11}^\beta b_\beta y_p - A_{11}^w \frac{b_2^2}{2} - B_{11}^f b_1 \\ E_{13} &= B_{11}^w b_2 \\ E_{14} &= B_{11}^w \frac{b_2^2}{2} \\ E_{15} &= B_{16}^\beta b_\beta \\ E_{16} &= A_{16}^f b_1 \\ E_{17} &= A_{16}^w b_2 \\ E_{22} &= A_{11}^\beta b_\beta y_p^2 + A_{11}^w b_2^2 \left(-y_p + \frac{b_2}{3}\right) + b_1 (-2B_{11}^f y_p + D_{11}^f) \\ E_{23} &= B_{11}^w b_2 \left(y_p - \frac{b_2}{2}\right) \\ E_{24} &= B_{11}^w b_2^2 \left(\frac{y_p}{2} - \frac{b_2}{3}\right) \\ E_{25} &= B_{16}^\beta b_\beta y_p - B_{16}^w \frac{b_2^2}{2} - D_{16}^f b_1 \\ E_{26} &= (A_{16}^f y_p - B_{16}^f) b_1 \\ E_{27} &= A_{16}^w b_2 \left(y_p - \frac{b_2}{2}\right) \\ E_{33} &= A_{11}^f \frac{b_1^3}{12} + D_{11}^w b_2 \\ E_{34} &= B_{11}^f \frac{b_1^3}{12} + D_{11}^w \frac{b_2^2}{2} \\ E_{35} &= D_{16}^w b_2 \\ E_{37} &= B_{16}^w b_2 \\ E_{44} &= D_{11}^f \frac{b_1^3}{12} + D_{11}^w \frac{b_2^3}{3} \\ E_{45} &= D_{16}^w \frac{b_2^2}{2} \\ E_{47} &= B_{16}^w \frac{b_2^2}{2} \\ E_{55} &= D_{66}^\beta b_\beta \\ E_{56} &= B_{66}^f b_1 \\ E_{57} &= B_{66}^w b_2 \\ E_{66} &= A_{55}^w b_2 + A_{66}^f b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{68} &= A_{55}^w \frac{b_2^2}{2} \\
 E_{77} &= A_{55}^f b_1 + A_{66}^w b_2 \\
 E_{88} &= A_{55}^f \frac{b_1^3}{12} + A_{55}^w \frac{b_2^3}{3}
 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 반복지수는 반복되는 합을 나타내는데, 지수 β 는 1과 2의 값을 가지며 각각 플랜지와 복부를 지칭한다. b_1 와 b_2 는 각각 플랜지와 복부판의 폭을 의미한다. 박판강성계수 A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} 는 각각 인장, 휨-인장 연계, 휨 강성계수를 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int \bar{Q}_{ij}(1, n, n^2) dn \tag{17}$$

3. 유한요소법

적층복합 보에 대한 휨 해석을 위해 변위법에 근거한 유한요소를 사용했다. 본 연구에서는 세가지 종류; 2절점, 3절점, 4절점 보요소와 함께 등매개변수 보요소(Isoparametric beam element)를 사용하였다. 부재내의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} u_{\alpha}, \quad v = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} v_{\alpha}, \quad w = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} w_{\alpha}, \\
 \Phi &= \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \Phi_{i\alpha}, \quad \theta_i = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \theta_{i\alpha} \quad (i = y, z), \\
 \phi_{\omega} &= \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \phi_{\omega\alpha}
 \end{aligned} \tag{18}$$

여기서 n 은 요소의 절점 수이고 N_{α} 는 절점 α 에서 형상함수를 나타낸다.

식 (18)의 형상함수를 식 (12)에 대입하고 정리하면 적층복합 박벽보의 평형방정식은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e \tag{19}$$

여기서 절점력 벡터 \mathbf{f}_e 는 절점작용하중과 등가 절점하중의 합이며, 요소 선형강성행렬 \mathbf{k}_e 는 다음과 같은 블록행렬 형식으로 나타내어진다.

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{20}$$

여기서 블록행렬 $\mathbf{k}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$)는 부록에 수록하였다.

각 부재의 강성행렬 \mathbf{k}_e 와 절점력 벡터 \mathbf{f}_e 는 직접강도법으로 전체구조물 강성행렬 \mathbf{K} 와 절점력 벡터 \mathbf{F} 를 구하면 전체구조물의 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F} \tag{21}$$

본 연구에서는 등매개변수 보요소의 사용으로 전단항을 적절히 취급하지 못하면 강성도가 과대 평가되는 소위 locking 현상이 발생하게 된다. 따라서 이러한 “shear locking” 현상을 극복하기 위하여 균일감차적분(uniform reduced integration) 기법을 사용하였다. 일반적으로 판/셸 요소에 균일감차적분을 적용하는 경우 요소 강성행렬의 계급(rank)이 낮아져서 여분의 zero-energy mode가 나타날 수 있지만 본 연구의 보 요소에서는 이러한 현상은 나타나지 않았다.

4. 수치해석

앞 절에서 유도한 T형 단면에 대한 적층강성계수와 블록강성행렬을 이용하여 복합적층 T형 보의 휨 해석을 수행하였으며 해석결과를 ABAQUS^[16] 유한요소 해석결과와 비교·검증하였다. 단면에 사용된 복합재는 Glass-epoxy로 재료 물성치는 아래와 같다:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 53.78 \text{ GPa}, \quad E_{22} = E_{33} = 17.93 \text{ GPa} \\
 G_{12} = G_{13} &= 8.96 \text{ GPa}, \quad G_{23} = 3.45 \text{ GPa}
 \end{aligned}$$

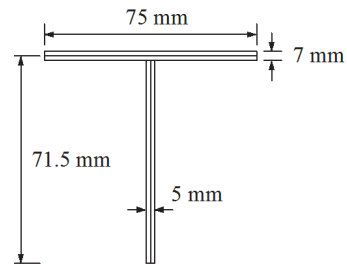


Fig. 2. Cross-sections of composite T-beam

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25, \quad \nu_{23} = 0.34$$

사용단면은 플랜지 폭과 웨브 높이가 75mm, 플랜지와 웨브의 두께가 각각 7mm와 5mm를 갖는 T형 단면을 Fig. 2에 보여주고 있다.

4.1 등분포하중하의 단순보

10kN/m의 등분포하중이 작용하는 단순보를 사용하였다. 보의 높이에 대한 길이 비(L/h)가 20이며 플랜지와 복부판은 각각 16개의 층으로 적층되어 있으며 동일한 적층순서와 적층각을 갖는 것으로 가정하였다. 단면을 구성하는 박벽요소는 중립면에 대해 대칭적층된 직교이방성과 앵글플라이를 고려하였다.

여러 가지 적층순서에 대해 본 연구의 블록강성행렬을 사용한 최대 처짐과 ABAQUS 유한요소 해석결과를 Table 1에 나타내었다. 본 연구에서는 2개의 3절점 보 요소로 모델링하였으며 ABAQUS 쉘 모델에서는 340개의 S9R5 쉘 요소를 사용했다. 이 때 박벽보의 콘투어방향 변형률 $\epsilon_s = 0$ 와 응력

$\sigma_s = 0$ 의 가정을 사용한 결과를 표시하였다. 평면응력($\sigma_s = 0$)으로 가정하여 구한 최대 처짐이 ABAQUS 결과와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다. 반면에, 평면변형률($\epsilon_s = 0$)으로 가정한 최대 처짐은 적층각 $\theta = 45^\circ$ 에서 최대 15.5% 과소평가함을 알 수 있다.

4.2 외팔보

일축 대칭인 박벽보 단면의 휨 거동을 조사하기 위해 1.0 kN/m의 등분포하중을 받는 보의 높이에 대한 길이 비가 L/h=10와 L/h=20인 외팔보를 고려하였다. 단면 제원과 재료 특성은 이전의 예와 동일하다. 플랜지와 복부판은 16개의 층으로 적층되고 단면을 구성하는 박벽요소는 중립면에 대해 대칭적층된 직교이방성과 앵글플라이를 고려하였다.

등분포하중에 대한 자유단의 최대 처짐값을 여러 가지 적층순서에 대해 ABAQUS 해석결과와 함께 Table 2에 요약하였다. 본 유한요소에서는 2개의 3절점 요소를 사용하였다. L/h=10와 L/h=20에 대해 평면응력으로 가정하여 구한 최대 처짐이 유한요소 해석결과와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다. 또한, 플라이앵글이 증가함에 따라 휨에 의한 처짐도 증가함을 알 수 있다.

본 연구에서 제안한 세 가지 종류의 보 요소에 대한 수렴성을 조사하기 위하여 자유단에 0.2 kN의 집중하중을 받는 외팔보를 사용하였다. 보의 높이에 대한 길이 비(L/h)가 20인 외팔보를 길이 방향으로 다른 요소 수로 모델링하였다. 각 적층순서에 대해 2절점(linear), 3절점(quadratic), 4절점(cubic) 보요소를 사용해 최대 처짐값을 ABAQUS 해석결과와 함께 Table 3에 나타내었다. 모든 적층순서에 대하여 3절점 보요소로 모델링한 유한요소는 4절점 보요소에 빠르게 수렴하며 ABAQUS 쉘 해석결과와 잘 일치함을 보여주고 있

Table 1. Displacements (cm) at mid-span of a simply supported beam under uniformly distributed load (L/h=20)

Stacking sequence	ABAQUS	Present	
		$\sigma_s = 0$	$\epsilon_s = 0$
[0] ₁₆	3.010	2.931	2.872
[15/-15] _{4s}	3.303	3.231	3.098
[30/-30] _{4s}	4.395	4.352	3.857
[45/-45] _{4s}	6.310	6.227	5.263
[60/-60] _{4s}	7.960	7.860	7.006
[75/-75] _{4s}	8.653	8.529	8.173
[0/90] _{4s}	4.432	4.354	4.265

Table 2. Maximum displacement (cm) of a cantilever beam under uniformly distributed load (L/h=10 & L/h=20)

Stacking sequence	L/h=10			L/h=20		
	ABAQUS	Present		ABAQUS	Present	
		$\sigma_s = 0$	$\epsilon_s = 0$		$\sigma_s = 0$	$\epsilon_s = 0$
[0] ₁₆	0.1863	0.1781	0.1745	2.806	2.783	2.725
[15/-15] _{4s}	0.2030	0.1958	0.1878	3.092	3.075	2.947
[30/-30] _{4s}	0.2671	0.2610	0.2329	4.135	4.130	3.682
[45/-45] _{4s}	0.3814	0.3750	0.3170	5.952	5.958	5.035
[60/-60] _{4s}	0.4828	0.4730	0.4216	7.532	7.526	6.708
[75/-75] _{4s}	0.5274	0.5132	0.4917	8.195	8.168	7.827
[0/90] _{4s}	0.2727	0.2630	0.2576	4.164	4.156	4.070

Table 3. Convergence of beam elements for mid-span displacement (cm) of a simply supported beam (L/h=20)

Stacking sequence	ABAQUS	Present						
		Linear				Quadratic		Cubic
		$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$
[0] ₁₆	0.9942	0.9721	0.9836	0.9865	0.9872	0.9875	0.9875	0.9875
[15/-15] _{4s}	1.097	1.075	1.087	1.090	1.091	1.091	1.092	1.092
[30/-30] _{4s}	1.470	1.444	1.461	1.466	1.467	1.467	1.467	1.467
[45/-45] _{4s}	2.117	2.084	2.109	2.115	2.117	2.117	2.117	2.117
[60/-60] _{4s}	2.678	2.633	2.664	2.672	2.674	2.675	2.675	2.675
[75/-75] _{4s}	2.912	2.858	2.892	2.900	2.902	2.903	2.903	2.904
[0/90] _{4s}	1.477	1.453	1.470	1.475	1.476	1.476	1.476	1.476

다. 또한, 하나의 4절점 보 요소를 사용한 결과는 32개의 2절점 보 요소 결과와 일치한다. 반면에 선형요소는 변위, 회전각, 뒀에 선형 형상함수를 사용하는 2절점 요소이다. 이러한 저차 형상함수는 전형적인 휨 거동을 정확하게 나타낼 수가 없으므로 2절점을 사용한 유한요소는 수렴속도가 느린 것을 확인할 수 있다.

4.3 전단변형의 영향

마지막 예제에서는 다양한 적층에 대한 연계성과 전단변형의 영향을 검토하기 위해 등분포하중이 작용하는 단순보를 고려하였다. 보의 전장에 $q = 10\text{kN/m}$ 의 등분포하중과 보의 높이에 대한 길이 비를 고려하기 위해 $L/h=5$ 와 $L/h=10$ 을 사용하였다. 플랜지와 웨브는 4개의 층으로 적층되어 있으며 적층순서는 각각 직교이방성 [0]₄와 역대칭 앵글플라이 $[\theta/-\theta]$ ₂이다. Fig. 3에 웨브의 앵글플라이 변화에 대한 무차원화된 최대 처짐값을 고전적 보이론(CBT)과

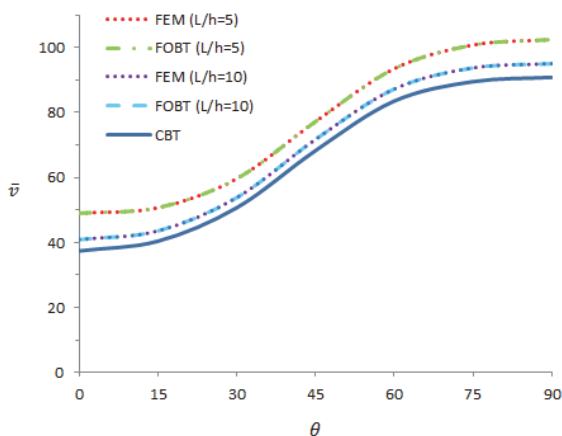


Fig. 3. Variation of mid-span displacement of simply supported beams (L/h=5 & L/h=10)

Timoshenko 1차 보이론(FOBT)에 의한 결과를 함께 나타내었다. 이 때 최대 처짐값은 $\bar{v} = v_{\max} E_2 b^3 / (ql^4)$ 으로 무차원화한 것이다. 등분포하중이 작용하는 단순보의 경우 비연계방정식에 대한 최대 처짐의 엄밀해는 다음과 같다^[17]:

$$v_{\max} = \frac{5ql^4}{384(EI_y)_{\text{om}}} + \frac{ql^2}{8(GA_x)_{\text{om}}} \quad (22)$$

식 (22)의 첫 번째와 두 번째 항은 각각 휨과 전단변형에 의한 처짐을 지칭한다. $L/h=5$ 와 $L/h=10$ 에 대해 모든 적층각 범위에서 유한요소 해석결과와 FOBT 해와 정확하게 일치하나 전단변형을 고려하지 않은 CBT 해와는 상당한 차이를 나타내고 있다. 일부 연계강성은 영이 아니지만 휨 강성에 비해 작아 재료 비등방성으로 인한 연계성 영향은 무시할 수 있어 본 연구에 의한 처짐 값은 직교이방성 해와 정확하게 일치하는 것을 알 수 있다. $L/h=10$ 의 경우 최대처짐에 대한 전단변형의 영향은 크지 않으나 $L/h=5$ 의 경우 전단변형의 영향이 증가함을 알 수 있다. 따라서 높이에 대한 길이 비가 작은 경우($L/h=5$) 전단변형을 무시한 CBT해는 모든 적층각 범위에서 처짐을 현저히 과소평가하므로 Timoshenko형 전단변형을 고려할 수 있는 모델을 사용해야한다.

5. 결론

본 연구에서는 적층복합 T형 보의 휨 해석을 위해 전단변형과 연계성 효과를 고려할 수 있는 세 종류의 보 요소; 2절점, 3절점, 4절점 요소를 제안하였다. 제안된 유한요소 모델은 경계조건, 높이 대 지간 비율, 적층각 등 다양한 조건에 대한 휨 거동을 정확하게 예측할 수 있다. 수치예제를 통하

여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

본 연구의 3절점과 4절점 보 요소는 모든 적층순서에 대해 적은 요소의 사용으로 판요소로 모델링한 ABAQUS 유한요소 해석결과와 잘 일치하였다. 콘투어방향의 응력이 0이라는 가정을 사용한 처짐은 유한요소 해석결과와 잘 일치하여 적절한 것으로 밝혀졌으나 콘투어방향의 변형이 0이라는 가정은 처짐을 과소평가하는 것으로 나타났다. 비등방성이 낮은 재료의 경우 직교이방성 해는 적절하다고 나타났다. 또한, 보의 높이에 대한 길이 비가 작은 경우 전단변형을 고려하지 않는 CBT해는 모든 적층각 범위에서 처짐을 과소평가하므로 적층복합 T형 보의 정확한 휨 해석을 위해 전단변형을 고려할 수 있는 모델이 사용되어야 한다. 제안된 모델은 적층복합 T형 보의 휨 거동을 조사하는데 적절하고 효과적임을 밝혔다.

참고문헌(References)

- [1] Bauld, N.R., Jr., and Tzeng, L.-S. (1984) A Vlasov Theory for Fiber-Reinforced Beams with Thin-Walled Open Cross Section, *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, Vol.20, No.3, pp.277-297.
- [2] Vlasov, V.Z. (1961) *Thin-Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations, Israel.
- [3] Maddur, S.S., and Chaturvedi, S.K. (2000) Laminated Composite Open Profile Sections: Non-Uniform Torsion of I-Sections, *Composite Structures*, Elsevier, Vol.50, No. 2, pp.159-169.
- [4] Jung, S.N., and Lee, J.-Y. (2003) Closed-Form Analysis of Thin-Walled Composite I-Beams Considering Non-Classical Effects, *Composite Structures*, Elsevier, Vol.60, No.1, pp.9-17.
- [5] Lee, J. (2005) Flexural Analysis of Thin-Walled Composite Beams Using Shear-Deformable Beam Theory, *Composite Structures*, Elsevier, Vol.70, No.2, pp.212-222.
- [6] 백성용, 이승식(2006) 전단변형을 고려한 적층복합 I형 박벽보의 C^0 유한요소, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제18권, 제3호, pp.349-359.
- Back, S.Y., and Lee, S.S. (2006) A C^0 Finite Element of Thin-Walled Laminated Composite I-Beams Including Shear Deformation, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.18, No.3, pp.349-359 (in Korean).
- [7] Vo, T.P., and Thai, H.-T. (2012) Static Behavior of Composite Beams Using Various Refined Shear Deformation Theories, *Composite Structures*, Elsevier, Vol.94, No.8, pp.2513-2522.
- [8] Back, S.Y., and Will, K.M. (2008) Shear-Flexible Thin-Walled Element for Composite I-Beams, *Engineering Structures*, Elsevier, Vol.30, No.5, pp.1447-1458.
- [9] Kim, N.-I. (2011) Shear Deformable Doubly- and Mono-Symmetric Composite I-Beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, Vol.53, No.1, pp.31-41.
- [10] Kabir, M.Z., and Shebourne, A.N. (1998) Optimal Fibre Orientation in Lateral Stability of Laminated Channel Section Beams, *Composites Part B: Engineering*, Elsevier, Vol.29, No.1, pp.81-87.
- [11] Lee, J., and Kim, S.-E. (2002) Lateral Buckling Analysis of Thin-Walled Laminated Channel-Section Beams, *Composite Structures*, Elsevier, Vol.56, No.4, pp.391-399.
- [12] Shan, L., and Qiao, P. (2005) Flexural-Torsional Buckling of Fiber-Reinforced Plastic Composite Open Channel beams, *Composite Structures*, Elsevier, Vol.68, No.2, pp.211-224.
- [13] 이승식, 백성용(2006) 축방향 압축력을 받는 인발성형 부재의 좌굴해석, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제18권, 제5호, pp.615-624.
- Lee, S.S., and Back, S.Y. (2006) Buckling Analysis of Pultruded Members Under Axial Compression, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.18, No.5, pp.615-624 (in Korean).
- [14] 이승식(2006) 일축대칭 FRP 부재의 전체좌굴에 관한 실험적 연구, 대한토목학회논문집 A, 대한토목학회, 제26권, 제1A호, pp.99-106.
- Lee, S.S. (2006) Experimental Study on Global Buckling of Singly Symmetric FRP Members, *Journal of Korean Society of Civil Engineers A*, KSCE, Vol.26, No.1A, pp. 99-106 (in Korean).
- [15] Jones, R.M. (1999) *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, USA.
- [16] Dassault Systèmes Simulia Corp. (2018) *Abaqus/Standard User's Manual, Ver. 6.1*, DSS, USA.
- [17] Reddy, J.N. (1997) *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, USA.

부록. T형 단면 강성값

각 부재의 강성블록행렬 k_e 는 다음과 같이 주어진다:

$$k_{11} = \int_l E_{11}N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{12} = \int_l E_{17}N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{13} = \int_l E_{18}N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{14} = \int_l (E_{15} + E_{18})N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{15} = \int_l [E_{12}N'_\alpha N'_\beta + E_{16}N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{16} = \int_l [E_{13}N'_\alpha N'_\beta + E_{17}N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{17} = \int_l [E_{14}N'_\alpha N'_\beta + (E_{18} - E_{15})N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{22} = \int_l E_{66}N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{23} = \int_l E_{67}N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{24} = \int_l (E_{56} + E_{68})N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{25} = \int_l [E_{26}N'_\alpha N'_\beta + E_{66}N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{26} = \int_l [E_{36}N'_\alpha N'_\beta + E_{67}N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{27} = \int_l [E_{46}N'_\alpha N'_\beta + (E_{68} - E_{56})N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{33} = \int_l E_{77}N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{34} = \int_l (E_{57} + E_{78})N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{35} = \int_l [E_{27}N'_\alpha N'_\beta + E_{67}N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{36} = \int_l [E_{37}N'_\alpha N'_\beta + E_{77}N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{37} = \int_l [E_{47}N'_\alpha N'_\beta + (E_{78} - E_{57})N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{44} = \int_l (E_{55} + 2E_{58} + E_{88})N'_\alpha N'_\beta dz$$

$$k_{45} = \int_l [(E_{25} + E_{28})N'_\alpha N'_\beta + (E_{56} + E_{68})N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{46} = \int_l [(E_{35} + E_{38})N'_\alpha N'_\beta + (E_{57} + E_{78})N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{47} = \int_l [(E_{45} + E_{48})N'_\alpha N'_\beta + (E_{88} - E_{55})N'_\alpha N'_\beta] dz$$

$$k_{55} = \int_l [E_{22}N'_\alpha N'_\beta + E_{26}(N'_\alpha N'_\beta + N_\alpha N'_\beta) + E_{66}N_\alpha N_\beta] dz$$

$$k_{56} = \int_l [E_{23}N'_\alpha N'_\beta + E_{27}N'_\alpha N'_\beta + E_{36}N_\alpha N'_\beta + E_{67}N_\alpha N_\beta] dz$$

$$k_{57} = \int_l [E_{24}N'_\alpha N'_\beta + (E_{28} - E_{25})N'_\alpha N'_\beta + E_{46}N_\alpha N'_\beta + (E_{68} - E_{56})N_\alpha N_\beta] dz$$

$$k_{66} = \int_l [E_{33}N'_\alpha N'_\beta + E_{37}(N'_\alpha N'_\beta + N_\alpha N'_\beta) + E_{77}N_\alpha N_\beta] dz$$

$$k_{67} = \int_l [E_{34}N'_\alpha N'_\beta + (E_{38} - E_{35})N'_\alpha N'_\beta + E_{47}N_\alpha N'_\beta + (E_{78} - E_{57})N_\alpha N_\beta] dz$$

$$k_{77} = \int_l [E_{44}N'_\alpha N'_\beta + (E_{48} - E_{45})(N'_\alpha N'_\beta + N_\alpha N'_\beta) + (E_{88} - 2E_{58} + E_{55})N_\alpha N_\beta] dz \tag{23}$$

요 약 : 본 연구에서는 적층복합 T형 보의 휨 해석을 위해 전단에 유연한 보 요소를 제안한다. 1차 전단변형 보 이론을 사용해 유도된 보 요소는 뒀 전단변형과 재료의 비등방성 성질에 따른 모든 연계성을 고려한다. 지배방정식의 해를 구하기 위해 절점 당 7개의 자유도를 갖는 2절점, 3절점, 4절점의 세 가지 보 요소를 제안한다. 제안된 보 요소의 활용성과 정확성을 검증하기 위해 등분포하중과 집중하중을 받는 대칭 및 비대칭 앵글프라이 복합 T형 보에 대해 수치해석을 수행한다. 다른 적층순서에 대해 화이버 각과 전단변형의 영향을 조사한다. 적층 복합 T형 보의 휨 해석에 대해 3절점과 4절점 보 요소의 유효성을 입증하였다.

핵심용어 : 전단에 유연한 보 요소, 복합 T형 보, 전단변형, 화이버 각