



부분강절 뼈대구조의 비탄성 좌굴해석

민병철^{1*}

¹부교수, 인덕대학교, 토목환경공학과

Inelastic Buckling Analysis of Frames with Semi-Rigid Joints

Min, Byoung Cheol^{1*}

¹Associate Professor, Dept. of Civil and Environmental Engineering, Induk University, Seoul, 139-749, Korea

Abstract - An improved method for evaluating effective buckling length of semi-rigid frame with inelastic behavior is newly proposed. Also, generalized exact tangential stiffness matrix with rotationally semi-rigid connections is adopted in previous studies^[16]. Therefore, the system buckling load of structure with inelastic behaviors can be exactly obtained by only one element per one straight member for inelastic problems. And the linearized elastic stiffness matrix and the geometric stiffness matrix of semi-rigid frame are utilized by taking into account 4th terms of Taylor series from the exact tangent stiffness matrix. On the other hands, two inelastic analysis programs(M1, M2) are newly formulated. Where, M1 based on exact tangent stiffness matrix is programmed by iterative determinant search method and M2 is using linear algorithm with elastic and geometric matrices. Finally, in order to verify this present theory, various numerical examples are introduced and the effective buckling length of semi-rigid frames with inelastic materials are investigated.

Keywords - Semi-rigid, Buckling, Stability function, Tangent stiffness matrix, Inelastic

1. 서론

강 뼈대 구조물의 엄밀한 안정성 설계를 위해서는 재료적 비선형과 기하학적 비선형 거동을 모두 고려하여 전체 구조계에 대한 극한 시스템 내하력을 파악하여야 한다. 그러나 구조물의 기하학적 및 재료적 비선형성을 모두 엄밀히 고려하는 것은 이론과 실 재료 간의 부합성, 비용 및 시간에 있어서 큰 어려움이 존재한다. 따라서 이러한 비선형 해석 기법의 대안으로 국내 및 해외의 설계기준은 시스템 안정성 검토를 생략하는 대신에 개별부재의 유효좌굴 길이를 산정하여 압축부재의 내하력을 결정하고, 부재안정성 식을 검토하는 설계방법을 사용하고 있다. 여기서, 유효좌굴길

이는 구조계 전체가 소성 및 좌굴거동에 의한 붕괴 시 개별 부재 내에 또는 부재 축을 가상으로 연장하여 휨모멘트가 영이 되는 유효한 부재 길이를 나타낸 것으로 구조 시스템이 개별 부재에 미치는 영향을 정량적으로 나타낼 수 있다. 미국의 경우, AISC-LRFD^[1] 설계기준에서는 한정된 조건을 갖는 뼈대구조물의 보-기둥에 대한 유효좌굴계수를 산정하기 위하여 Alignment chart의 사용을 추천하고 있으며, 일본은 재료적 비선형성을 고려하기 위한 방법으로 혼슈시코쿠연락공단의 현수교 주탑설계요령을 통해 탄소성을 고려한 시스템 좌굴강도를 근사적으로 산정할 수 있는 극한 내하력 곡선을 이용하고 있다. 그 밖에도 뼈대구조의 유효좌굴길이를 산정하기 위한 다양한 연구가 현재까지 진행되어 왔으며 이를 요약하면 다음과 같다.

Yura^[2]는 브레이싱이 없는 라멘구조의 유효좌굴길이를 유도하였고 LeMessurier^[3]는 양단 강절프레임의 2차 해석을 통해 실용적인 유효좌굴길이 계산방법을 제안하였다. Cheng^[4]은 브레이싱에 의해 지지된 강뼈대구조의 K-factor를 제시하였고 Galambos^[5]와 Salmon and Johnson^[6]은 각

Note.-Discussion open until December 31, 2014. This manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on January 1, 2014; revised February 27, 2014; approved on April 7, 2014.

Copyright © 2014 by Korean Society of Steel Construction

*Corresponding author.

Tel. +82-2-950-7566 Fax. +82-2-950-7579

E-mail. msilver@induk.ac.kr

각 강구조의 좌굴거동에 대한 연구를 통해 설계기준을 제안하였으며 Aristizabal-Ochoa^[7]는 다양한 종류의 단면력과 경계조건을 갖는 보-기둥의 좌굴거동을 조사하였다. 그러나 현재까지 수행된 차트법을 이용한 평면뼈대구조의 유효좌굴길이 산정은 부재의 단면상수와 강성이 동일하며 모든 기둥이 동시에 좌굴된다는 기본가정을 갖고 있어 실무에 적용하기 위해서는 상당한 보정을 필요로 한다. 최근 차트법의 대안으로 구조물 전체에 대한 시스템 탄성좌굴 해석을 통해 유효좌굴길이를 산정하는 방법이 Jin *et al.*^[8] 등에 의해 제시되었으나 유효좌굴길이 산정에서 비탄성거동의 영향이 고려되지 않아 부재의 세장비에 관계없이 구조물 전체가 선형탄성거동을 가정하게 되며 실제 구조물의 붕괴를 살펴보면 탄성해석에 의한 좌굴모드와 파괴형상은 상당한 차이를 나타내게 된다. 한편, Kim *et al.*^[9]은 이를 비탄성 좌굴해석으로 범위를 확장하여 전체 구조시스템에 대한 비탄성 유효좌굴길이를 일반화 시켰으나, 강구조물의 부재간의 연결이 강절(rigid) 또는 활절(pinned)인 경우로 국한되는 한계를 갖고 있다. 그 밖에도 Seo *et al.*^[10]은 박벽단면 부재의 국부좌굴 및 횡-비틀림좌굴에 대한 연구를 수행하였고 Lee *et al.*^[11]은 플랜지의 폭두께비에 따른 회전능력을 조사하였으며 Park *et al.*^[12]은 조립보의 비탄성 횡좌굴 거동에 대한 실험 및 해석을 수행하였다.

본 연구에서는 실제 구조물의 거동에 부합될 수 있도록 재단모멘트에 대해 일정량의 회전변위가 허용되는 부분강절(semi-rigid) 특성과 재료적 비탄성거동을 고려한 고유치 해석을 통해 구조물을 구성하는 개별부재의 유효좌굴길이를 산정하는 일반화된 해석기법을 제시하고자 한다. 이를 위하여, 구조물을 구성하는 압축부재의 기준내하력곡선에서 접선탄성계수와 유효좌굴길이를 산출하는 Ef법(Iwasaki *et al.*^[13])을 적용하여 도로교설계기준^[14]에서 제시하는 내하력곡선식으로부터 세장비에 대응하는 탄소성좌굴응력을 결정하고 이에 대응하는 새로운 접선 탄성계수를 얻을 수 있다. 결국, 본 연구에서는 부분강절을 갖는 뼈대구조와 관련된 이전의 연구^[15]로 부터 비탄성 거동을 고려하여 일반화된 부분강절 뼈대구조의 탄성 및 비탄성 좌굴해석을 수행하고 전체 구조계를 구성하는 개별부재의 유효좌굴길이를 비교하여 제시하고자 한다. 또한, 본 해석 이론을 토대로 Fortran 언어를 이용한 해석 프로그램을 개발하고 다양한 해석예제를 통해 부재 간 연결이 회전스프링인 부분강절 뼈대구조물의 탄성 및 비탄성 좌굴해석을 수행하였고 구조물을 구성하는 개별 부재의 유효좌굴길이를 함께 제시하였다.

본 연구에서 개발된 해석프로그램은 엄밀한 안정함수를 사용하고 있어, 구조물을 구성하는 직선부재 하나 당 한 개의 요소만을 사용하여 모델링해도 정확한 비탄성 시스템 좌굴 하중을 얻을 수 있다.

2. 단순지지된 압축부재의 비탄성좌굴

본 장에서는 접선계수이론을 이용한 단일 기둥의 비탄성 좌굴 해석방법과 도로교설계기준의 극한내하력설계기준을 소개하고 재료적 비선형성을 근사적으로 고려하는 해석기법을 제시한다.

2.1 접선계수이론과 압축부재의 비탄성 좌굴

본 절에서는 먼저 탄성거동을 하는 단순지지된 기둥부재의 좌굴응력과 좌굴모드는 선형탄성계수 E 와 세장비 λ 를 이용하여 각각 다음과 같이 정의한다.

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad y = \sin \frac{\pi x}{L} \tag{1}$$

한편, 접선계수이론에 의한 평형방정식과 비탄성 좌굴응력은 접선탄성계수 E_t 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_t I y'''' + P y'' = 0 \tag{2}$$

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \tag{3}$$

여기서 탄소성 좌굴하중은 비례한도를 초과하는 범위에서의 비선형 응력-변형도 관계를 고려할 수 있어 알루미늄과 같은 특수재료의 비탄성 좌굴해석에도 적용될 수 있다. 접선계수 이론에 기초하여 시스템 좌굴 고유치 해석을 반복적으로 수행하고 개별부재에 대한 압축부재의 기준 내하력곡선에서 Ef법을 이용한 접선탄성계수 E_t 와 유효좌굴길이를 산출한다. 여기서 Ef법은 반복계산 알고리즘 중 첫 번째 단계($n=1$)에 대응하는 탄성좌굴 고유치 해석을 수행하면 개별 부재에 대하여 탄성좌굴응력 $\overline{f_{cr}^{(1)}}$ 과 세장비 $\overline{\lambda^{(1)}}$ 를 산정할 수 있다. 한편, 설계기준에서 제시하는 내하력곡선 식으

로부터 세장비에 대응하는 탄소성 좌굴응력 \bar{f}_u 을 결정하고 이에 대응하는 새로운 접선 탄성계수를 다음 식과 같이 계산할 수 있다.

$$\bar{E}_{t,i}^{(2)} = \bar{E}_{t,i}^{(1)} \times \bar{f}_{u,i} / \bar{f}_{cr,i}^{(1)} \quad (4)$$

새로운 접선탄성계수는 탄소성 좌굴응력 $\bar{f}_{cr,i}^{(n)}$ 와 탄소성 좌굴 내하력 $\bar{f}_{u,i}$ 가 동일해질 때까지 반복하여 계산한다. 한편, 각 부재의 비탄성 좌굴을 고려한 유효좌굴길이 $L_{e,i}^{(n)}$ 및 유효세장비 $\lambda_e^{(n)}$ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$L_{e,i}^{(n)} = \pi \sqrt{E_{t,i}^{(n)} I_i / P_{cr,i}^{(n)}} \quad (5)$$

$$\lambda_e^{(n)} = \pi \sqrt{E_{t,i}^{(n)} / f_{cr}} \quad (6)$$

2.2 기둥의 극한내하력 설계규정

구조물을 구성하는 강재 기둥은 제작 및 시공오차에 의한 초기결함, 용접잔류응력, 단면형상 등에 의해 좌굴에 대한 내하력의 감소가 발생할 수 있으므로 도로교설계기준은 이론적인 좌굴해석 결과와 실험에 바탕을 둔 실험 결과를 고려하여 도로교 설계기준에 제시된 극한강도 $f_{u,i}$ 이용해 극한내하력을 식 (7)과 같이 규정하고 있다.

$$\bar{f} = \frac{f_{u,i}}{f_y} = 1.0 \quad ; \quad \bar{\lambda} \leq 0.2 \quad (7a)$$

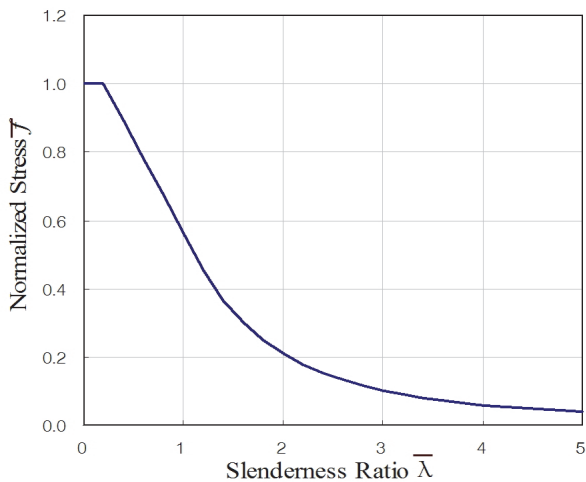


Fig. 1. Load-bearing capacity curve^[15]

$$\bar{f} = 1.109 - 0.545 \bar{\lambda} \quad ; \quad 0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0 \quad (7b)$$

$$\bar{f} = 1.0 / (0.773 + \bar{\lambda}^2) \quad ; \quad \bar{\lambda} > 1.0 \quad (7c)$$

여기서, 좌굴응력 f_{cr} 과 항복응력 f_y 그리고 항복응력과 좌굴응력이 같아지는 한계세장비 λ_o 및 유효좌굴길이 L_e 그리고 단면회전반경 r 을 이용하여 정규화된 응력 \bar{f} 와 세장비 $\bar{\lambda}$ 를 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{f} = \frac{f_{cr}}{f_y} \quad (8)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_o} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \cdot \left(\frac{L_{e,i}}{r} \right) \quad (9)$$

식 (7a)는 단주로서 좌굴이 발생하지 않으므로 좌굴응력과 항복응력의 크기가 동일하고 식 (7b)와 식 (7c)는 좌굴응력이 감소하여 Fig. 1과 같이 수렴하게 된다. 또한, 수렴의 판정은 전단계 $E_{t,i}^{(n)}$ 와 $E_{t,i}^{(n+1)}$ 가 허용치 ϵ 이내로 들도록 다음과 같이 정의한다.

$$\left| \frac{E_{t,i}^{(n+1)} - E_{t,i}^{(n)}}{E_{t,i}^{(n)}} \right| < \epsilon \quad (10)$$

여기서

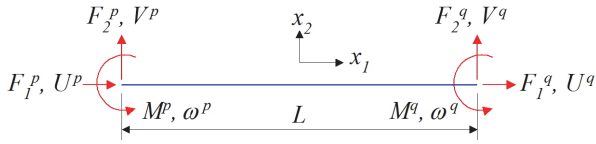
$$E_{t,i}^{(n+1)} = \frac{f_{u,i}}{f_{cr,i}^{(n)}} E_{t,i}^{(n)} \quad (11)$$

3. 부분강절 뼈대구조의 강도행렬

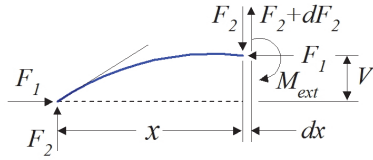
3.1 강절로 연결된 뼈대구조의 접선강도행렬

Fig. 2(a)는 평면 뼈대요소의 부재좌표계 x_1 과 x_2 , 재단력벡터 F_e 와 재단변위벡터 U_e 를 나타낸 것으로 구성 성분은 다음과 같다.

$$F_e = \{F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q\}^T \quad (12a)$$



(a) Stress resultants and displacement vectors



(b) Equilibrium for buckling

Fig. 2. Frame element with rigid connections

$$U_e = \{U^p, V^p, \omega^p, U^q, V^q, \omega^q\}^T \quad (12b)$$

여기서, F_1 , F_2 그리고 M 은 각각 축력, 전단력, 모멘트이며 U , V , ω 는 축방향 변위, 횡변위, 회전변위를 의미한다. 부재에 작용하는 축력이 일정한 경우, 축방향 거동은 Bowing 함수를 고려하여 다음과 같은 힘-변위 관계를 갖는다.

$$F_1' = 0 \quad (13)$$

$$\frac{F_1}{EA} = U' + \frac{1}{2}(V')^2 \quad (14)$$

여기서 E 와 A 는 탄성계수와 부재의 단면적을 나타내며 V' 는 회전각 ω 로 정의된다. 한편, 면내변형은 Fig. 2(b)의 모멘트 평형으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{ext}'' = (-F_2 + F_1 V')' = 0 \quad (15)$$

또한, 모멘트-전단력의 관계와 모멘트-휨강성 관계는 다음과 같다.

$$M' = F_2 \quad (16)$$

$$M = -EI\omega' \quad (17)$$

식 (15)와 식 (16)으로부터 경계조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} V(0) &= V^p, \quad -F_2(0) + F_1 V'(0) = F_2^p \\ V(L) &= V^q, \quad -F_2(L) + F_1 V'(L) = -F_2^q \\ \omega(0) &= \omega^p, \quad M(0) = M^p \\ \omega(L) &= \omega^q, \quad M(L) = -M^q \end{aligned} \quad (18)$$

또한, 식 (17)을 식 (15)에 대입하면, 다음과 같은 4계 미분방적을 얻을 수 있다.

$$V'''' + k^2 V'' = 0 \quad (19)$$

여기서

$$k^2 = \frac{F_1}{EI} \quad (20)$$

식 (19)로부터 처짐에 대한 일반해는 다음과 같다.

$$V = A \cos kx + B \sin kx + Cx + D \quad (21)$$

또한, 식 (21)을 식 (18)의 경계조건을 이용하고 식 (20) 으로부터 유효좌굴계수 k 와 $\beta = kL$ 을 적용하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(0) &= V^p; \quad A + D = V^p \\ V(L) &= V^q; \quad A \cos \beta + B \sin \beta + CL + D = V^q \\ V'(0) &= \omega^p; \quad kB + C = \omega^p \\ V'(L) &= \omega^q; \quad k(B \cos \beta - A \sin \beta) + C = \omega^q \end{aligned} \quad (22)$$

그리고 미지계수 A, B, C 를 구하기 위하여 각각 $\omega^p - \omega^q$, $V^p - V^q + L\omega^p$ 그리고 $\omega^p + \omega^q$ 를 취해 연립방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$A = \frac{1}{\phi_c} \left[(1 - \cos \beta)(V^p - V^q) + \left(\frac{\sin \beta}{k} - L \cos \beta \right) \omega^p - \left(\frac{\sin \beta}{k} - L \right) \omega^q \right] \quad (23a)$$

$$B = -\frac{1}{\phi_c} \left[\sin \beta (V^p - V^q) + \left(L \sin \beta - \frac{1 - \cos \beta}{k} \right) \omega^p + \left(\frac{1 - \cos \beta}{k} \right) \omega^q \right] \quad (23b)$$

$$C = \frac{1}{\phi_c} [k \sin\beta (V^p - V^q) + (1 - \cos\beta)(\omega^p - \omega^q)] \quad (23c)$$

여기서

$$\phi_c = 2 - 2\cos\beta - \beta\sin\beta \quad (24)$$

식 (23)을 고려하여 식 (21)에 대입하고 식 (16)과 식 (18)를 이용하면 p 단에서의 전단력은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} F_2^p &= -F_2(0) + F_1 V'(0) \\ &= \frac{EI\beta^2}{L^3\phi_c} [\beta\sin\beta(V^p - V^q) \\ &\quad + L(1 - \cos\beta)(\omega^p + \omega^q)] \end{aligned} \quad (25)$$

동일한 방법으로 q 단에서의 전단력을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_2^q &= F_2(L) - F_1 V'(L) \\ &= -\frac{EI\beta^2}{L^3\phi_c} [\beta\sin\beta(V^p - V^q) \\ &\quad + L(1 - \cos\beta)(\omega^p + \omega^q)] \end{aligned} \quad (26)$$

한편, 식 (17)과 식 (18)로 부터 p 단에서의 모멘트가 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} M^p &= -EI \cdot \omega'(0) \\ &= \frac{EI\beta}{L^2\phi_c} [\beta(1 - \cos\beta)(V^p - V^q) \\ &\quad + L(\sin\beta - \beta\cos\beta)\omega^p + L(\beta - \sin\beta)\omega^q] \end{aligned} \quad (27)$$

동일한 방법으로 q 단의 모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^q &= EI \cdot \omega'(L) \\ &= \frac{EI\beta}{L^2\phi_c} [\beta(1 - \cos\beta)(V^p - V^q) \\ &\quad + L(\beta - \sin\beta)\omega^p + L(\sin\beta - \beta\cos\beta)\omega^q] \end{aligned} \quad (28)$$

결국, 식 (25)~(28)을 취합하여 행렬형태로 재단력-재단변위 관계를 나타내면 양단이 모두 강절인 2차원 뼈대요

소의 접선강도행렬 k_R 을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_c = k_R U_c \quad (29)$$

양단이 강절로 연결된 식 (29)의 접선강도행렬 k_R 은 이전의 연구결과^[15]를 참고할 수 있다.

3.2 부분강절로 연결된 뼈대구조의 접선강도행렬

Fig. 3은 부재 양단에 회전스프링을 갖는 부분강절 뼈대구조를 나타낸 것으로 ω^p, ω^q 는 강절로 연결된 경우의 절점 회전각을 나타내고, θ^p, θ^q 는 부분강절로 연결됨으로 인하여 발생하는 부재 양단의 회전각으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\theta^p = M^p / K_\theta^p, \quad \theta^q = M^q / K_\theta^q \quad (30)$$

그리고

$$R_p = K_\theta^p L / EI, \quad R_q = K_\theta^q L / EI \quad (31)$$

여기서 K_θ^p, K_θ^q 는 부재 양단의 탄성회전스프링 상수로 k

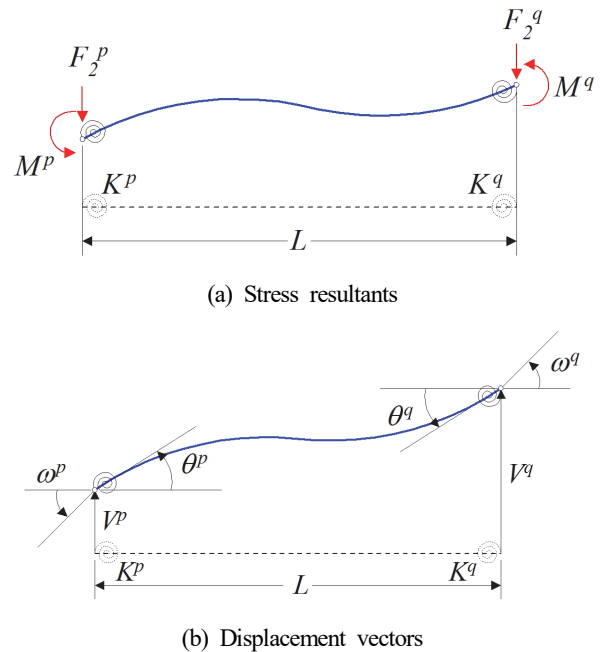


Fig. 3. Frame element with Semi-rigid connections

$N \cdot m/rad$ 의 단위를 갖는다. 부재 양단에서의 횡방향 변위와 회전변위 그리고 각각의 적합조건을 고려하고 부재 양단의 절점에 작용하는 모멘트 평형조건을 고려하여 연립방정식을 풀면, 부분강절 뼈대요소의 접선강도행렬 k_T 가 얻어지며 이를 고려하여 재단력-재단변위 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_e = k_T \cdot U_e \tag{32}$$

여기서 k_T 는 이전의 연구결과^[16]와 동일한 형태이나 본 논문에서 제시된 부분강절 뼈대구조의 접선강도행렬은 강절 연결된 뼈대구조의 접선강도행렬에 대해서 스프링을 도입하여 힘-변위 관계를 구하고 가로흔들이 거동을 적용하여 얻은 결과이며, 이전의 연구^[15]는 양단이 회전스프링으로 연결된 보를 미리 가정한 후, 보의 양단에 단위 횡변위와 단위 회전변위를 각각 발생시켜 이에 대응하는 재단 변위성분을 구하고 평형조건으로부터 힘-변위 관계를 정리하여 행렬의 구성성분을 유도한 것으로 비교될 수 있다.

한편, 안정함수를 이용하여 유도된 식 (32)의 접선강도행렬 k_T 는 $\beta = kL$ 과 식 (20)을 이용하여 탄성강도로 구성된 탄성강도행렬 k_E 와 하중 항으로 나타나는 기하학적 강도행렬 k_G 로 분리될 수 있으며, 이를 위해 식 (32)의 k_T 를 구성하는 안정함수를 Taylor series의 네 번째 항까지를 고려하고 β 의 2차 항까지를 포함하여 정리하면, 다음과 같이 탄성강도행렬 k_E 와 기하학적 강도행렬 k_G 인 상수행렬로 분리하여 나타낼 수 있다.

$$k_T = k_E \mp k_G \tag{33}$$

여기서 식 (33)을 구성하는 k_E 와 k_G 는 이전의 연구결과^[13]를 참고할 수 있다.

3.3 부분강절 구조계의 비탄성 해석프로그램 개발

본 연구에서는 부분강절 뼈대구조의 효율적인 비탄성 좌굴해석을 수행하기 위하여, 식 (32)의 접선강도행렬을 사용한 비탄성 좌굴해석프로그램 M1(*Method 1*)과 식 (33)에서와 같은 탄성 및 기하학적 강도행렬을 이용한 비탄성 좌굴해석프로그램 M2(*Method 2*)을 새롭게 개발하였다. M1은 i 번째 좌굴모드에 대한 고유치(좌굴하중) ξ_i 를 구하

는 경우, 구조계 전체에 대한 시스템 접선강도 행렬 K_T 에 대해 전진소거법으로 행렬식을 산정한 후 초기 가정치에 의한 반복 접근법으로 $|K_T(\xi_i)|=0$ 를 만족하는 고유치(좌굴하중)를 찾아 낼 수 있으며 이 방법은 안정함수 사용으로 인해 직선부재 하나 당 한 개의 요소 모델링만으로도 정확한 해에 수렴될 수 있는 장점을 갖는다. 또한, 산정된 고유치에 대해 Penalty method(Bathe^[16])를 적용하면 Eigen Vector를 얻을 수 있으나 이를 위해서는 여러 개의 요소분할을 적용해야 한다. 한편, M2는 식 (33)의 개별요소에 대한 k_E 와 k_G 를 이용하여 구조계 전체에 대한 탄성강도행렬 K_E 와 기하학적강도행렬 K_G 를 변환 구성하고, $|K_E - \xi_i K_G|=0$ 를 만족하는 고유치 ξ_i 를 산정하는 선형 근사해석기법으로 정확한 해석을 위해서는 다수의 유한요소 분할이 요구되며 Eigen Vector는 산정할 수 없다.

4. 수치해석

다양한 종류의 수치해석을 통해 본 연구에서 제시한 부분강절 뼈대구조의 탄성좌굴과 비탄성좌굴 특성을 비교하고 식 (32)의 접선강도 행렬에 의한 해석 M1과 식 (33)의 탄성강도행렬 및 기하학적강도행렬에 의한 해석 M2의 결과를 비교 검토함으로써 본 연구의 타당성을 제시하고자 한다. 또한, 회전 스프링의 강성변화에 따른 비탄성 및 탄성 좌굴의 특성을 조사한다. 스프링 강성은 식 (31)의 R 을 이용하여 정규화(Non-dimensional) 하였으며 전체 구조계에 대한 좌굴하중 P_{cr} 은 개별부재 i 의 축력 F_i^i 을 고려하여 유효좌굴계수 k_e^i 를 식 (34)과 같이 정의하였다.

$$k_e^i = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{P_{cr} \times F_1^i}} \tag{34}$$

4.1 다양한 경계조건을 갖는 표준 기둥

본 예제에서는 Fig. 4와 같이 다양한 경계조건을 갖는 표준 기둥에 대해 식 (32)의 접선강도 행렬을 이용한 해석 M1과 식 (33)의 탄성강도행렬 및 기하학적 강도행렬에 의한 해석 M2를 이용하여 탄성 및 비탄성 좌굴해석을 수행하였다. 우선, M2의 탄성 및 비탄성 좌굴에 대한 수렴성을 조사하기 위하여 C-C(Clamped-Clamped) 경계조건을 갖

는 기둥에 대해 모델링 요소의 수를 변화시키며 해석하고 1개의 요소만으로 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 M1과 의 결과를 비를 이용하여 Fig. 5에 나타내었다. 이 경우, 요소 수가 1개일 때 M2에 의한 해석은 수렴하지 않았고 5개 이상 사용하면 충분히 수렴될 수 있는 것으로 판단되어 본 연구에서의 모든 예제는 M2를 사용하는 경우에 직선부재 1개당 5개 요소를 적용하였다.

Table 1은 Fig. 4에 제시된 여러 기둥들에 대한 탄성 및 비탄성 좌굴해석 결과를 나타낸 것으로, C-F는 Clamped-Free, P-P는 Pinned-Pinned, C-C는 Clamped-Clamped, C-S는 Clamped-Sliding, C-P는 Clamped-Pinned 경계조건을 나타낸다. Table 1에서 Timoshenko and Gere^[17]

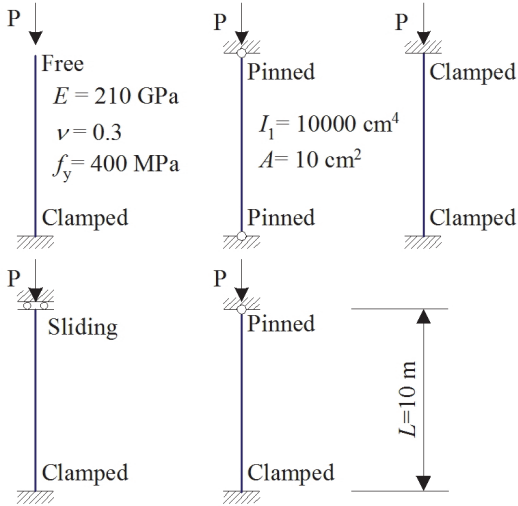


Fig. 4. Standard Beam-column

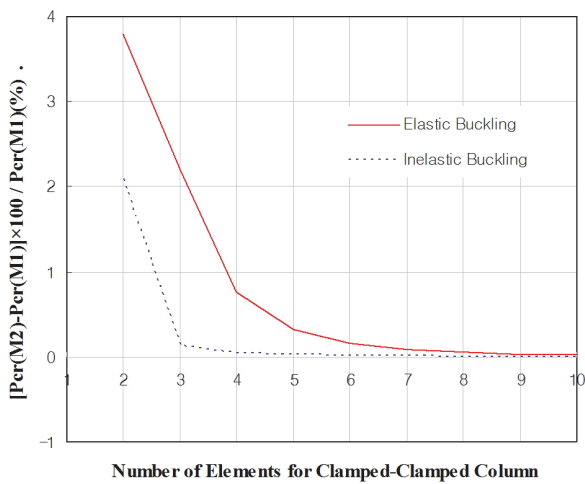


Fig. 5. Element-convergence by program M2

Table 1. Buckling load P_{cr} & effective coefficient k_e

B.C.	Elastic				Inelastic		
	$P_{cr}(kN)$			k_e	$P_{cr}(kN)$		k_e
	Ref ^[17]	M1	M2	M1	M1	M2	M1
C-F	518.15	518.15	518.15	2	252.06	252.06	2.8675
P-P	2072.6	2072.6	2072.6	1	347.83	347.83	2.4410
C-C	8290.5	8290.5	8292.2	0.5	395.72	395.72	2.2886
C-S	2072.6	2072.6	2072.6	1	347.83	347.83	2.4410
C-P	4240.1	4240.1	4240.3	0.6992	376.64	376.64	2.3458

의 탄성좌굴 값이 본 연구에서 제시한 M1과 M2에 의한 해석결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있으며 식 (34)을 이용하여 나타낸 유효좌굴계수 k_e 는 비탄성좌굴에서 경계조건에 관계없이 특정 값의 분포를 나타냈다.

4.2 고정지지된 부분강절 라멘

본 예제에서는 지점이 고정 지지되고 수평부재와 수직부재가 부분강절로 연결된 라멘형 뼈대구조에 대하여 회전스프링의 강성변화에 따른 탄성 및 비탄성 해석을 수행하였다. 식 (31)에서 제시된 수평부재 양단의 회전스프링 값 K_θ 와 무차원화 된 회전강성 R 의 관계를 고려하여 R 을 0(활절)에서 ∞ (강절)까지 변화시키며 수치해석을 수행하였고 좌굴하중 P_{cr} 및 유효좌굴계수 k_e 를 Table 2에 각각 제시하였다. 점성강도 행렬을 이용한 해석 M1(부재 당 1개 요소 적용)과 탄성강도행렬 및 기하학적 강도행렬에 의한 해석 M2(부재 당 5개 요소 적용)를 이용한 해석 결과의 최대 차이가 0.006%로 서로 잘 일치함에 따라 Table 2 및 Fig. 7은 M1에 의한 해석결과만을 제시하였으며 활절과 강절 연결

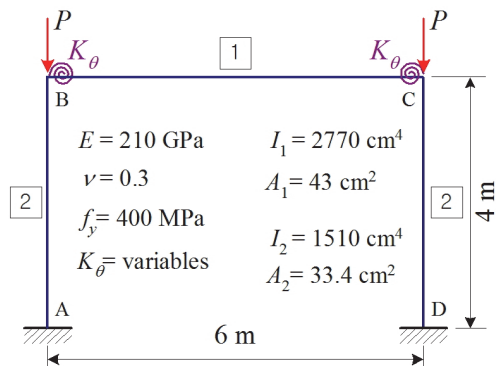
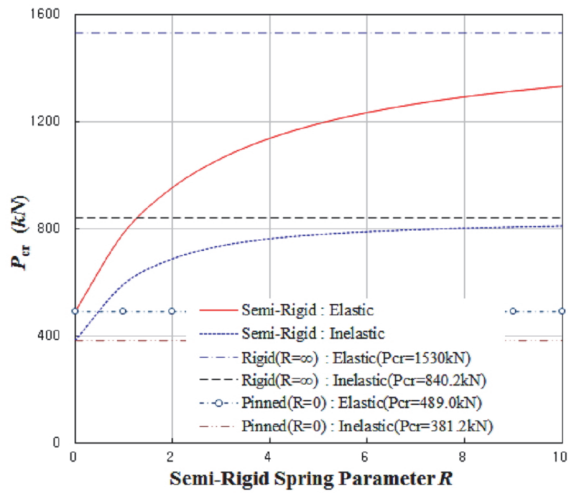


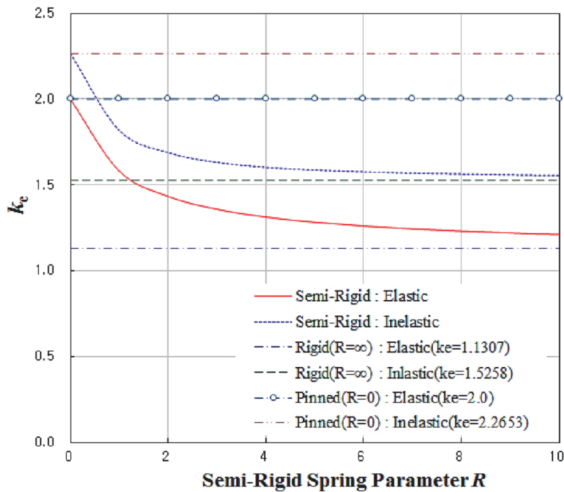
Fig. 6. Semi-rigid portal frame under two vertical loads

조건의 경우에 Sekulovic and Salatic^[18]은 각각 489kN 및 1,530kN의 탄성좌굴하중이 얻어져 본 연구의 해석결과와 동일하게 나타났다. 부분강철의 강도에 따라 수직부재의 탄성좌굴에 대한 유효좌굴계수 k_e 는 1.131에서 2.0의 범위를 갖으며 비탄성의 좌굴인 경우 1.526에서 2.265의 범위를 나타냈다. 이 결과로부터 구조부재의 유효좌굴계수는 비탄성의 경우에 2.0 이상의 값이 발생할 수 있음을 인지하고 설계에 반영하여야 한다. Fig. 7은 정규화된 회전강성 R 의 크기에 따른 탄성 및 비탄성 좌굴하중과 유효좌굴계수 k_e 의 변화를 나타낸 것으로, R 의 증가에 따라 좌굴하중은 단조증가하고 유효좌굴계수는 반대로 단조 감소함을 알 수 있다.

Fig. 8은 접선강도 행렬을 이용한 해석기법 M1을 이용



(a) Relations of $R-P_{cr}$



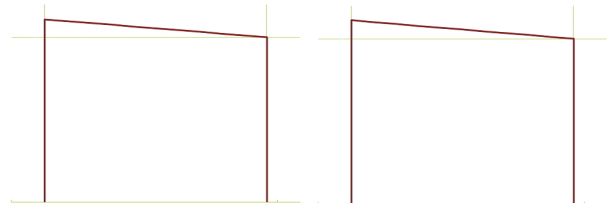
(b) Relations of $R-k_e$

Fig. 7. Buckling parameters of Semi-rigid portal frame

하여 탄성 및 비탄성 좌굴에 대응하는 좌굴모드를 나타낸 것으로서 2차원 형상좌표를 얻기 위해 부재 당 10개의 요소를 적용하였으며 얻어진 고유벡터에 확대계수를 적용하여 좌굴모드를 제시하였다. 그 결과, 스프링 강성이 $R=0$ (힌

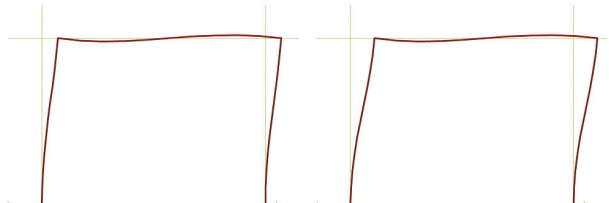
Table 2. Elastic and inelastic buckling by M1

R	K_θ (kN·m/rad)	Elastic		Inelastic	
		P_{cr} (kN)	k_e	P_{cr} (kN)	k_e
0(Pinned)		489.01	2	381.16	2.2653
1	792.75	782.86	1.5807	591.95	1.8178
2	1585.5	952.59	1.4330	686.70	1.6877
3	2378.3	1061.3	1.3576	734.96	1.6314
4	3171.0	1136.3	1.3120	761.85	1.6023
5	3963.8	1191.0	1.2815	777.35	1.5863
6	4756.5	1232.5	1.2598	787.83	1.5757
7	5549.3	1265.1	1.2435	795.36	1.5682
8	6342.0	1291.3	1.2308	801.02	1.5627
9	7134.8	1312.8	1.2207	805.43	1.5584
10	7927.5	1330.8	1.2124	808.95	1.5550
∞ (Rigid)		1529.9	1.1307	840.21	1.5258



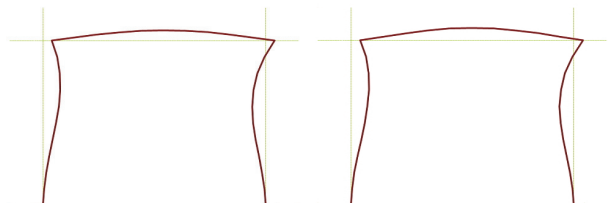
(a) Elastic for $R=0$

(b) Inelastic for $R=0$



(c) Elastic for $R=5$

(d) Inelastic for $R=5$



(e) Elastic for $R=10$

(g) Inelastic for $R=10$

Fig. 8. Eigen vector(Buckling mode)

지연결)인 경우에 탄성 및 비탄성 좌굴모드에서 수평변위 벡터가 나타나지 않고 수직변위벡터만 발생하였고 $R=5$ 의 경우에는 탄성 및 비탄성 모두 횡방향 변위벡터를 갖는 비대칭 좌굴모드가 발생하였다. 한편, 부분강절의 회전스프링 강성이 매우 큰 $R=10$ 의 경우에는 가로 흔들이가 거의 없는 대칭형태의 좌굴형상이 탄성 및 비탄성 좌굴모드를 나타냈다.

4.3 비횡지지 및 횡지지 3층 부분강절 뼈대구조물

본 예제에서는 지점은 활절이고 수평방향에 대해 비횡지지 및 횡지지 경계조건을 갖는 3층 뼈대구조물에 단위 수직

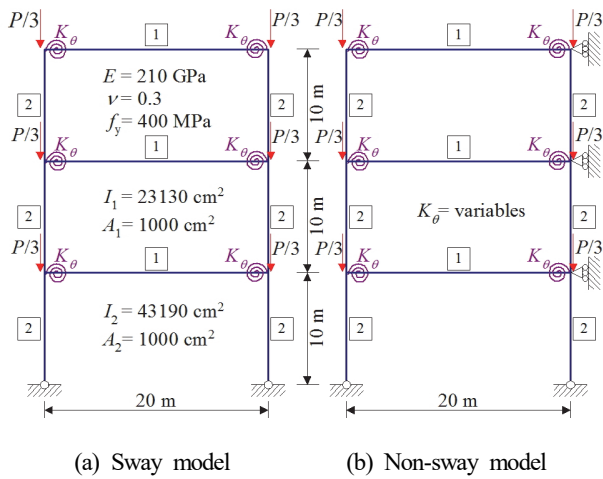
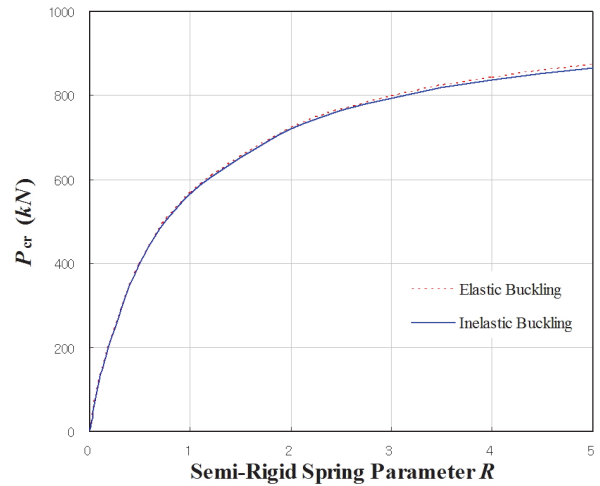


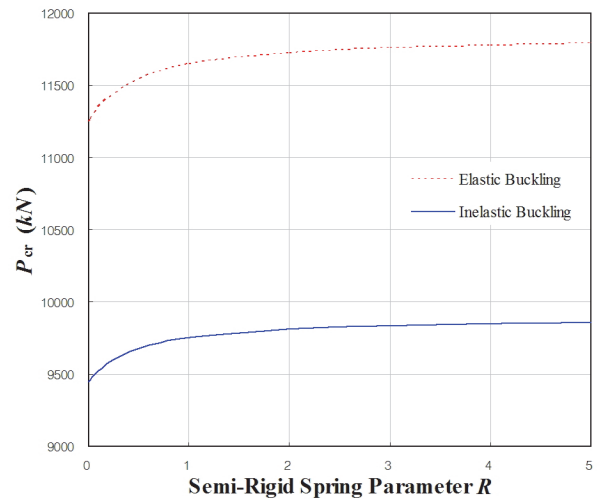
Fig. 9. 3-Story Semi-rigid frames

Table 3. Elastic and inelastic P_{cr} (kN) by M1

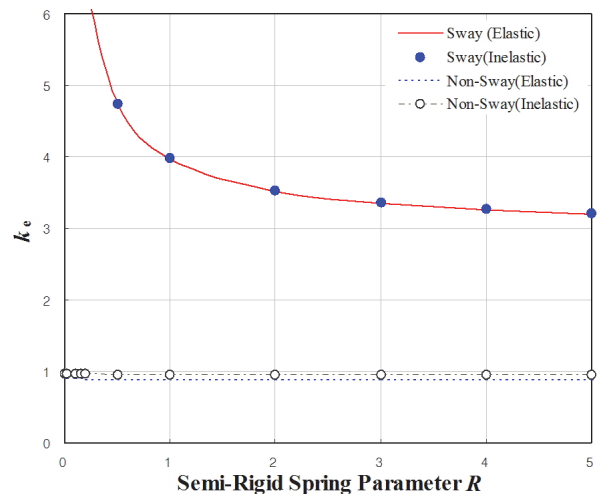
R	K_{θ} (kN·m/rad)	Sway model		Non-sway model	
		Elastic	Inelastic	Elastic	Inelastic
0(Pinned)	0	0	0	11245	9447.6
0.0165	150	21.981	21.981	11265	9462.7
0.1	906.99	119.05	119.04	11348	9525.8
0.2	1814.0	211.73	211.66	11420	9580.6
0.5	4535.0	398.45	397.92	11548	9677.9
1	9069.9	567.29	565.74	11647	9752.5
2	18140	723.88	720.66	11726	9811.6
3	27210	798.86	794.54	11760	9836.7
4	36280	843.00	837.94	11778	9850.6
5	45350	872.12	866.52	11790	9859.4
∞ (Rigid)		1014.5	1005.7	11844	9899.0



(a) Relations of $R-P_{cr}$ for sway model



(b) Relations of $R-P_{cr}$ for Non-sway model



(c) Relations of $R-k_e$

Fig. 10. Buckling parameters of 3-Story Semi-rigid frames

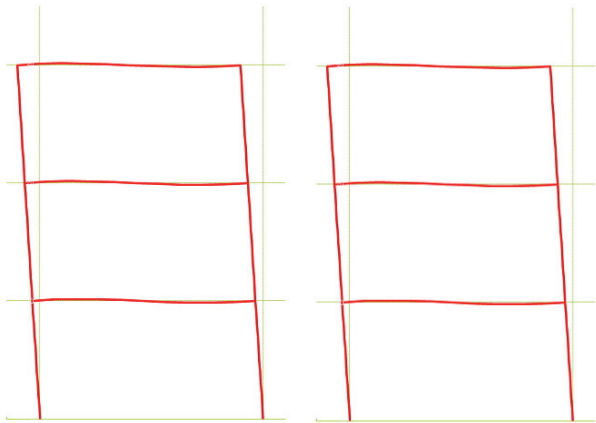
하중 P 가 1/3씩 각 층의 양단에 나누어 작용되고 수평부재 양단이 회전스프링 K_θ 에 의해 연결된 경우, 스프링 강성 R 의 변화에 따른 탄성 및 비탄성 좌굴해석을 수행하였다.

해석 시 부재 당 5개 요소를 적용한 M2와 부재 당 1개 요소를 사용한 M1의 해석 결과가 최대 0.002% 차이로 탄성 및 비탄성 좌굴하중이 서로 잘 일치하여 Table 3 및 Fig. 10은 M1에 의한 결과만을 제시하였다.

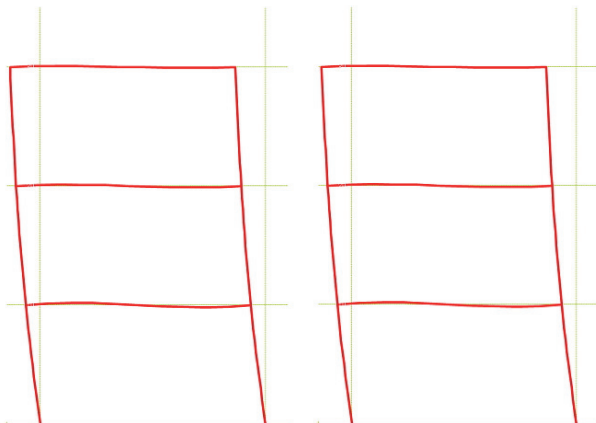
본 예제에서 회전스프링 강성이 $R=0.0165$ ($K_\theta=150$ kN·m/rad)인 경우에, 해석방법이 다른 Mageirou and Gantes^[19]는 비횡지지 및 횡지지 조건의 탄성좌굴하중을 각각 21,94kN 및 11,275kN를 제시하여 본 연구의 해석결과와 거의 일치(99.8% 및 99.9%)하였다. 또한, Fig. 10(a)는 스프링강성 R 의 변화에 따른 비횡지지된 구조(Sway Model)의 탄성 및 비탄성 좌굴하중은 서로 유사하게 나타났으나 Fig. 10(b)와 같이 횡지지된 경우(Non-Sway Model)

에서는 좌굴하중의 차이가 일정한 크기로 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 비횡지지된 구조계의 임계하중이 작아 재료가 비탄성 범위에 들기 전에 좌굴되는 현상으로 파악되며 이러한 영향은 Fig. 10의 유효좌굴계수 k_e 에서도 나타나고 있다.

Fig. 11과 Fig. 12는 경계조건에 따른 구조물의 좌굴형상을 M1에 의해 해석하여 나타낸 것으로 형상좌표를 얻기 위해 직선 부재 당 10개의 요소를 적용하였고 얻어진 고유벡터에 확대계수를 적용하여 좌굴모드를 제시하였다. Fig. 11 및 Fig. 12에서 알 수 있는 바와 같이 좌굴모드는 탄성과 비탄성좌굴에 관계없이 유사한 좌굴형상을 나타냈고 그림 표기를 위한 확대계수는 서로 다르게 적용되었다. 이로부터 구조부재의 좌굴형상은 부재의 비탄성 거동 보다는 부재 간에 연결된 회전 스프링 강성에 따라 큰 차이가 나타남을 확인할 수 있다.

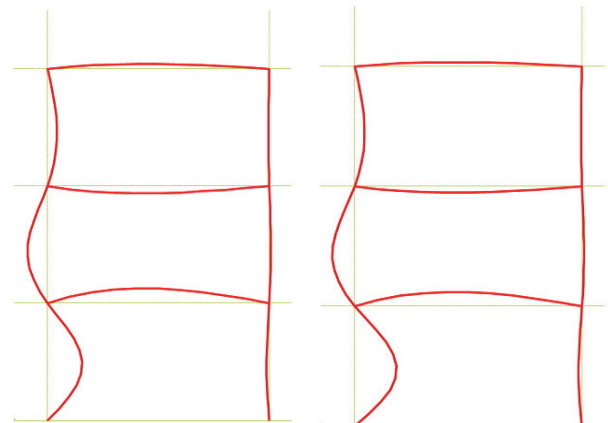


(a) Elastic($R=0.0165$) (b) Inelastic($R=0.0165$)

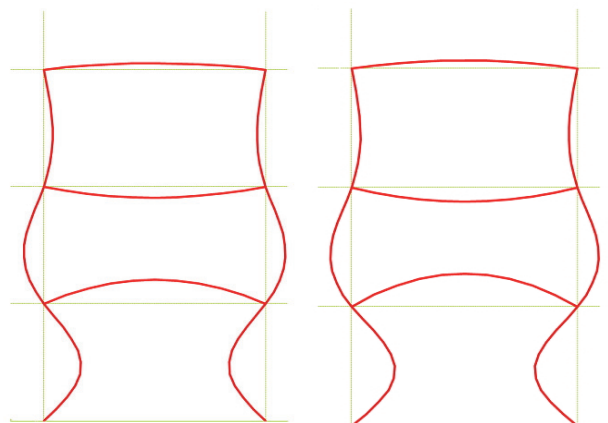


(c) Elastic($R=1.0$) (d) Inelastic($R=1.0$)

Fig. 11. Buckling modes for sway model



(a) Elastic($R=0.0165$) (b) Inelastic($R=0.0165$)



(c) Elastic($R=1.0$) (d) Inelastic($R=1.0$)

Fig. 12. Buckling modes for Non-sway model

5. 결론

본 연구에서는 부분강철 뼈대구조의 극한 내하력을 파악하기 위하여 탄성좌굴을 비탄성좌굴로 해석범위를 확대하고 전체 구조계를 구성하는 개별 부재의 유효좌굴길이를 산정하였다. 이를 위하여, 안정함수를 이용한 접선강도 행렬과 선형화된 탄성 및 기하학적 강도행렬에 대해 Ef법에 의한 재료적 비탄성 거동을 고려할 수 있도록 이론화하였으며 Fortran 언어를 이용한 비탄성 해석프로그램을 개발하였다. 또한, 다양한 수치해석 예제를 통해 부분강철이 구조계의 탄성 및 탄소성 좌굴과 유효좌굴길이에 미치는 영향을 조사하였으며 핵심 내용을 요약하면 다음과 같다.

- (1) Ef법(iwasaki)을 적용하여 도로교설계기준에 근거하는 내하력곡선식으로부터 유효좌굴세장비에 대응하는 탄소성 좌굴응력을 결정하고 이에 대응하는 새로운 접선 탄성계수를 산출함으로써 부분강철 뼈대구조의 비탄성 좌굴해석 방법을 제시하였다.
- (2) 이전의 연구^[15]에서 제시되었던 부분강철 뼈대구조의 엄밀한 비선형 접선강도행렬 k_T 와 선형 탄성강도행렬 k_E 및 기하학적강도행렬 k_G 를 이용하여 구조물의 비탄성 거동을 고려할 수 있는 좌굴해석 프로그램을 개발하였다.
- (3) 부분강철 뼈대구조의 탄성 및 비탄성 좌굴 그리고 유효좌굴길이에 대한 매개변수 연구를 통해 부분강철이 시스템 좌굴과 개별부재의 유효좌굴길이에 미치는 영향을 다양한 수치해석을 통해 제시하였다.
- (4) 비탄성 좌굴과 부분강철이 전체 구조물의 좌굴형상(고유벡터)과 유효좌굴계수에 미치는 영향을 제시하였다.

참고문헌(References)

- [1] American Association of State Highway and Transportation Officials (2002) *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications* (2nd Ed., Interim Revisions), USA.
- [2] Yura, J.A. (1971) The Effective Length of Column in Unbraced Frames, *Engineering Journal*, American Institute of Steel Construction, Vol.8, No.2, pp.37-42.
- [3] LeMessurier, W.J. (1977) A Practical Method of Second Order Analysis, Part 2: Rigid Frames, *Engineering Journal*, American Institute of Steel Construction, Vol.14, No.2, pp.49-67.
- [4] Cheong-Siat-Moy, F. (1986) K-Factor Paradox, *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, Vol.112, No.8, pp.1747-1760.
- [5] Galambos, T.V. (1988) *Guide to Structural Stability Design Criteria for Metal Structures* (4th Ed.), John Wiley & Sons, USA.
- [6] Salmon, C.G., and Johnson, J.E. (1996) *Steel Structures: Design and Behavior*, Harper Collins, USA.
- [7] Aristizábal-Ochoa, J.D. (2004) Column Stability and Minimum Lateral Bracing: Effects of Shear Deformations, *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, Vol.130, No.10, pp.1223-1232.
- [8] 진만식, 경용수, 김문영(2004) 평면프레임의 좌굴설계를 위한 정확한 유효좌굴계수 산정, 대한토목학회논문집 A, 대한토목학회, 제24권, 제3A호, pp.509-519.
Jin, M.-S., Kyung, Y.-S., and Kim, M.-Y. (2004) Determination of the Accurate Effective Length Factor for Buckling Design of Plane Frames, *Journal of the Korean Society of Civil Engineers A*, KSCE, Vol.24, No.3A, pp. 509-519.
- [9] 김문영, 송주영, 경용수(2005) 탄성 및 비탄성 좌굴 고유치 해석을 이용한 강뼈대구조의 유효좌굴길이, 한국전산구조 공학회논문집, 한국전산구조공학회, 제18권, 제2호, pp. 169-179.
Kim, M.-Y., Song, J.-Y., and Kyung, Y.-S. (2005) Determination of Effective Buckling Length of Plane Frames Using Elastic and Inelastic System Buckling Analysis, *Journal of Computational Structural Engineering Institute of Korea*, COSEIK, Vol.18, No.2, pp.169-179.
- [10] 서건호, 서상정, 권영봉(2011) 국부좌굴이 발생하는 H-형 강 휨부재의 강도에 관한 연구, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제23권, 제6권, pp.647-657.
Seo, G.H., Seo, S.J., and Kwon, Y.B. (2011) A Study on the Moment Capacity of H-Section Flexural Members with Local Buckling, *Journal of Korea Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.23, No.6, pp.647-657 (in Korean).
- [11] 이철호, 한규홍, 김대경, 박창희, 김진호, 이승은, 하태휴 (2012) 800MPa급 고강도강 보 부재의 국부좌굴 및 비탄성 거동, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제24권, 제 4호, pp.479-490.
Lee, C.H., Han, K.H., Kim, D.K., Park, C.H., Kim, J.H., Lee, S.E., and Ha, T.K. (2012) Local Buckling and Inelastic Behaviour of 800MPa High-Strength Steel Beams,

- Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.24, No.4, pp.479-490 (in Korean).
- [12] 박창희, 이철호, 한규홍, 김진호, 이승은, 하태휴, 김진원 (2013) 고강도 강재보의 비탄성 횡-비틀림좌굴 제어를 위한 횡지지 거리, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제25권, 제2호, pp.115-130.
Park, C.H., Lee, C.H., Han, K.H., Kim, J.H., Lee, S.E., Ha, T.H., and Kim, J.W. (2013) Laterally Unbraced Length for Preventing Inelastic Later-Torsional Buckling of High-Strength Steel Beams, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.25, No.2, pp.115-130 (in Korean).
- [13] Iwasaki, H., Nogami, K., and Nagai, M. (2001) Precision of Ef Method for Evaluating Load-Carrying Capacity of Long-Span Cable-Stayed Bridges and Its Ultimate Strength Check, *IABSE Reports (Proceedings of IABSE Conference Seoul 2001)*, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol.84, pp.110-111.
- [14] 건설교통부(2000) 도로교설계기준.
Ministry of Construction and Transportation (2000) *Highway Bridge Design Standard*, Korea (in Korean).
- [15] 민병철, 경용수, 김문영(2008) 부분강절로 연결된 평면뼈대구조의 엄밀한 접선강도행렬 및 안정성 해석프로그램 개발, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제20권, 제1호, pp.81-92.
Min, B.C., Kyung, Y.S., and Kim, M.Y. (2008) Exact Tangent Stiffness Matrix and Buckling Analysis Program of Plane Frames with Semi-Rigid Connections, *Journal of Korean Society of Steel Construction*, KSSC, Vol.20, No. 1, pp.81-92 (in Korean).
- [16] Bathe, K.-J. (2006) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.
- [17] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M. (1961) *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, USA.
- [18] Sekulovic, M., and Salatic, R. (2001) Nonlinear Analysis of Frames with Flexible Connections, *Computer & Structures*, Elsevier, Vol.79, No.11, pp.1097-1107.
- [19] Mageirou, G., and Gantes, C.J. (2006) Buckling Strength of Multi-Story Sway, Non-Sway and Partially-Sway Frames with Semi-Rigid Connections, *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier, Vol.62, No.9, pp.893-905.

요 약 : 본 연구에서는 부분강절 뼈대구조물의 비탄성 좌굴해석기법을 제시하기 위하여, 이전의 연구^[16]에서 제시되었던 부분강절 뼈대구조의 엄밀한 강도행렬과 선형해석을 위한 탄성 및 기하학적 강도행렬을 도입하고 비탄성 좌굴해석을 위해 도로교시방서의 극한내하력 기준과 EF법을 이용하여 부분강절 뼈대구조의 비탄성 좌굴해석 프로그램을 새롭게 개발하였다. 본 연구에서 제시한 부분강절 뼈대구조의 접선강도행렬은 안정함수를 사용함에 따라 부재 당 하나의 요소만으로 정확한 비탄성 좌굴해석 결과를 얻을 수 있으며 고유벡터를 이용하여 비탄성 좌굴형상을 얻을 수 있는 장점을 갖는다. 또한, 엄밀한 접선강도행렬에 대해 Taylor 전개를 수행하여 4차항까지 고려함으로써 탄성 강도행렬과 기하학적 강도행렬을 유도하고 선형화된 좌굴해석기법을 제시하였다. 결국, 접선강도행렬을 이용한 비선형 해석프로그램(M1)과 탄성 및 기하학적 강도행렬을 이용한 선형 해석프로그램(M2)이 개발되었으며 이를 이용하여 부분강절로 연결된 뼈대구조물의 비탄성좌굴에 대한 시스템 좌굴하중과 개별부재의 유효좌굴계수를 제시함에 따라 부분강절이 전체 구조계의 좌굴과 개별부재의 유효좌굴길이에 미치는 영향을 다양한 해석예제를 통해 조사하였다.

핵심용어 : 부분강절, 좌굴, 안정함수, 접선강도행렬, 비탄성
